Θέματα Μιγαδικών Αριθμών από τις Πανελλαδικές Εξετάσεις

……..γιατί συχνά, οι ιδέες επαναλαμβάνονται…………

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΠΑΠΠΑΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ

2^{ο} ΓΕΝ. ΛΥΚΕΙΟ ΥΜΗΤΤΟΥ

2002

ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΛΥΚΕΙΑ

Κανονικές εξετάσεις 2002

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω z ένας μιγαδικός αριθμός και $f(\nu) = i^{\nu} \cdot z$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

α. Να δείξετε ότι $f(3) + f(8) + f(13) + f(18) = 0$.

Μονάδες 7

β. Αν $|z| = \rho$ και $\operatorname{Arg}(z) = \theta$, να δείξετε ότι

$$f(13) = \rho\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) + i \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right].$$

Μονάδες 8

γ. Αν $|z| = 2$ και $\operatorname{Arg}(z) = \frac{\pi}{3}$, να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών 0, z και f(13).

Μονάδες 10

---**2 ΓΕΛ ΥΜΗΤΤΟΥ**---

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ 2002

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί

$$z_1 = 1 - 2i \quad \kappa\alpha\iota \quad z_2 = 3 + 4i$$

α) Αν $\dfrac{z_2}{z_1} = x + yi,\ \ x, y \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $x = -1$ και $y = 2$.

Μονάδες 8

β) Αν μια ρίζα της εξίσωσης $x^2 + \beta x + 2\gamma = 0,$ όπου $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, είναι η $\dfrac{z_2}{z_1}$, να βρείτε τις τιμές των β και γ.

Μονάδες 8

γ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει

$$|z - 2z_1| = |z_2|$$

Μονάδες 9

--**2 ΓΕΛ ΥΜΗΤΤΟΥ**---

2003

<u>ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΛΥΚΕΙΑ</u>

<u>Κανονικές εξετάσεις 2003</u>

<u>ΘΕΜΑ 2ο</u>

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z=\alpha+\beta i$, όπου α,β$\in\mathbb{R}$ και $w=3z-i\bar{z}+4$, όπου $\bar{z}$ είναι ο συζυγής του z.

α. Να αποδείξετε ότι

Re(w)=3α–β+4 και Im(w)=3β–α.

Μονάδες 6

β. Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση y=x–12, τότε οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση y=x–2.

Μονάδες 9

γ. Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς z, οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση y=x–2, έχει το ελάχιστο μέτρο.

Μονάδες 10

--2 ΓΕΛ ΥΜΗΤΤΟΥ---

<u>Επαναληπτικές εξετάσεις 2003</u>

<u>ΘΕΜΑ 2ο</u>

α. Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο (Σ) των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z|=2 \text{ και } \mathrm{Im}(z)\geq 0.$$

Μονάδες 12

β. Να αποδείξετε ότι, αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z κινείται στο σύνολο (Σ), τότε η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{4}{z}\right)$ κινείται σε ευθύγραμμο τμήμα το οποίο βρίσκεται στον άξονα x΄x .

Μονάδες 13

--2 ΓΕΛ ΥΜΗΤΤΟΥ---

<u>ΕΣΠΕΡΙΝΑ ΛΥΚΕΙΑ</u>

<u>Κανονικές εξετάσεις 2003</u>

<u>ΘΕΜΑ 4ο</u>

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z = x + yi, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί και

$$w=\frac{i(i+z)}{i-z} \text{ με } z\neq i.$$

Να αποδείξετε ότι :

α. $w=\frac{2x}{x^2+(y-1)^2}+\frac{1-x^2-y^2}{x^2+(y-1)^2}i,$

Μονάδες 8

β. αν ο w είναι πραγματικός αριθμός, τότε η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο κέντρου O(0 , 0) και ακτίνας

$\rho_1 = 1$ και

Μονάδες 8

γ. αν ο z είναι πραγματικός αριθμός, τότε η εικόνα του w ανήκει σε κύκλο κέντρου O(0 , 0) και ακτίνας $\rho_2 = 1$

Μονάδες 9

--2 ΓΕΛ ΥΜΗΤΤΟΥ--

<u>ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ 2003</u>

<u>ΘΕΜΑ 3ο</u>

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(z) = \dfrac{z+i}{z}$, όπου z μιγαδικός αριθμός με z≠0.

α) Αν $|f(z)| = |f(\bar{z})|$, να αποδείξετε ότι ο z είναι πραγματικός αριθμός.

Μονάδες 6

β) Αν $|f(z)| = 1$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο.

Μονάδες 9

γ) Αν $\mathrm{Re}(f(z)) = 2$, να αποδείξετε ότι οι εικόνες του μιγαδικού αριθμού z, βρίσκονται σε κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.

Μονάδες 10

--2 ΓΕΛ ΥΜΗΤΤΟΥ--

2004

ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΛΥΚΕΙΑ

Κανονικές εξετάσεις 2004

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση f: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(1)=1$. Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύει

$$\boxed{g(x)=\int_1^{x^3}|z|\,f(t)dt-3\left|z+\frac{1}{z}\right|(x-1)\geq 0},$$

όπου $z=\alpha+\beta i\in\mathbb{C},\;\;\mu\varepsilon\;\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε τη g'.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι

$$|z|=\left|z+\frac{1}{z}\right|$$

Μονάδες 8

γ. Με δεδομένη τη σχέση του ερωτήματος **β** να αποδείξετε ότι

$$\mathrm{Re}\left(z^2\right)=-\frac{1}{2}$$

Μονάδες 6

δ. Αν επιπλέον $f(2)=\alpha>0,\;f(3)=\beta\;\;\kappa\alpha\iota\;\;\alpha>\beta$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(2,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

Μονάδες 6

---2 ΓΕΛ ΥΜΗΤΤΟΥ---

Επαναληπτικές εξετάσεις 2004

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται μια συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο διάστημα [α, β] με f(x) ≠ 0 για κάθε x $\in$ [α, β] και μιγαδικός αριθμός z με

Re(z) ≠ 0, Im(z) ≠ 0 και $|\mathrm{Re}(z)|>|\mathrm{Im}(z)|$.

Αν

$z+\frac{1}{z}=f(\alpha)$ και $z^2+\frac{1}{z^2}=f^2(\beta)$, να αποδείξετε ότι:

α. $|z|=1$

Μονάδες 11

β. $f^2(\beta)<f^2(\alpha)$

Μονάδες 5

γ. η εξίσωση $x^3f(\alpha)+f(\beta)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (–1, 1).

Μονάδες 9

ΕΣΠΕΡΙΝΑ ΛΥΚΕΙΑ

Κανονικές εξετάσεις 2004

ΘΕΜΑ 4ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z=x+yi$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί, για τους οποίους υπάρχει $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει:

$$\boxed{\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2+\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 i=\alpha+(1-\alpha)i}$$

Να αποδείξετε ότι:

α. αν Im(z) = 0, τότε α = 1.

Μονάδες 5

β. αν α = 0, τότε $z^2+1=0$.

Μονάδες 5

γ. για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει: 0 ≤ α ≤ 1 .

Μονάδες 7

δ. οι εικόνες Μ των μιγαδικών αυτών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν σε κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

Μονάδες 8

---2 ΓΕΛ ΥΜΗΤΤΟΥ---

<u>Επαναληπτικές εξετάσεις 2004</u>

<u>ΘΕΜΑ 4ο</u>

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z = x + yi, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί, για τους οποίους υπάρχει $\kappa\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει:

$$\boxed{x=3-\kappa \quad \text{και} \quad y=2\kappa+1}.$$

Να αποδείξετε ότι:

α) αν 3 Re(z) + 4 Im(z) = 3, τότε k = −2.

Μονάδες 9

β) αν z −1 = 5 , τότε z = 10 .

Μονάδες 10

γ) οι εικόνες Μ των μιγαδικών αυτών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν σε ευθεία, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

Μονάδες 6

---2 ΓΕΛ ΥΜΗΤΤΟΥ---

<u>ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ 2004</u>

<u>ΘΕΜΑ 3ο</u>

Έστω z μιγαδικός αριθμός, με $z\neq\pm i$ και $w=\dfrac{z}{z^2+1}$.

α) Να αποδείξετε ότι αν ο w είναι πραγματικός, τότε ο z είναι πραγματικός ή $|z|=1$.

Μονάδες 10

β) Να λύσετε, στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών, την εξίσωση

$$\frac{z}{z^2+1}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Μονάδες 10

γ) Αν z_1, z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (β), να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\boxed{\mathrm{K}=\frac{(z_1\cdot z_2)^3-i}{4+(z_1+z_2)^2}}$$

Μονάδες 5

---2 ΓΕΛ ΥΜΗΤΤΟΥ---

2005

<u>ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΛΥΚΕΙΑ</u>

<u>Κανονικές εξετάσεις 2005</u>

<u>ΘΕΜΑ 2^ο</u>

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$.

α) Δείξτε ότι: $\overline{z_1} = \dfrac{9}{z_1}$.

Μονάδες 7

β) Δείξτε ότι ο αριθμός $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1}$ είναι πραγματικός .

Μονάδες 9

γ) Δείξτε ότι: $|z_1 + z_2 + z_3| = \dfrac{1}{3}|z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1|$.

Μονάδες 9

---2 ΓΕΛ ΥΜΗΤΤΟΥ---

<u>Επαναληπτικές εξετάσεις 2005</u>

<u>ΘΕΜΑ 2^ο</u>

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει

$$z_1 + z_2 = 4 + 4i \quad \text{και} \quad 2z_1 - \overline{z_2} = 5 + 5i$$

να βρείτε τους z_1, z_2.

Μονάδες 10

β. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z,w ισχύουν

$$|z - 1 - 3i| \le \sqrt{2} \quad \text{και} \quad |w - 3 - i| \le \sqrt{2}:$$

i. να δείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί z, w έτσι, ώστε z=w και

Μονάδες 10

ii. να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z - w|$.

Μονάδες 5

---2 ΓΕΛ ΥΜΗΤΤΟΥ---

<u>ΕΣΠΕΡΙΝΑ ΛΥΚΕΙΑ</u>

<u>Κανονικές εξετάσεις 2005</u>

<u>ΘΕΜΑ 2ο</u>

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί:

$$z = \lambda^2 - 2 + (3 - 2\lambda)i, \ \lambda \in \mathbb{R} \ \text{ και } \ w = \kappa + 4i, \ \kappa > 0.$$

Για τους z, w ισχύουν:

$$\text{Re}(z) + \text{Im}(z) = 0 \quad \text{και} \quad |w| = 5.$$

α. Να αποδείξετε ότι $z = -1 + i$.

Μονάδες 8

β. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 3$.

Μονάδες 8

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\mu \in \mathbb{R}$, για το οποίο ισχύει $z + \mu\bar{z} = 3i - w$.

Μονάδες 9

--2 ΓΕΛ ΥΜΗΤΤΟΥ--

Επαναληπτικές εξετάσεις 2005

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός , $z = \dfrac{x+3i}{2-i}, \quad x \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε το x, ώστε ο αριθμός z να είναι φανταστικός.

Μονάδες 10

β. Αν x = –6, να αποδείξετε ότι ο z είναι πραγματικός αριθμός.

Μονάδες 6

γ. Αν x = 4, να βρείτε το $|\bar{z}|$.

Μονάδες 9

--2 ΓΕΛ ΥΜΗΤΤΟΥ--

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ 2005

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί

$$z_1 = 3 + i \ \text{ και } \ z_2 = 1 - 3i.$$

α) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{z_1}{z_2} = i \ \text{ και } \ |i \cdot z_1 + z_2|^2 = 0$

Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι $z_1^{2006} + z_2^{2006} = 0$

Μονάδες 8

γ) Θεωρούμε το μιγαδικό αριθμό $w = \dfrac{\kappa z_1 - iz_2}{z_2 - \kappa z_2}, \quad \kappa \in \mathbb{R} - \{1\}$

Να αποδείξετε ότι για κάθε $\kappa \in \mathbb{R} - \{1\}$ ισχύει Im(w) = −1 .

Μονάδες 9

--2 ΓΕΛ ΥΜΗΤΤΟΥ--

2006

ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΛΥΚΕΙΑ

Κανονικές εξετάσεις 2006

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

α. Να αποδείξετε ότι:

i. $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$.

Μονάδες 9

ii. $|z_1 - z_2|^2 \le 4$ και $\mathrm{Re}\left(z_1 \overline{z_2}\right) \ge -1$.

Μονάδες 8

β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς και το είδος του τριγώνου που αυτές σχηματίζουν.

Μονάδες 8

---2 ΓΕΛ ΥΜΗΤΤΟΥ---

Επαναληπτικές εξετάσεις 2006

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, που ικανοποιούν την ισότητα

$$(4 - z)^{10} = z^{10}$$

και η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = x^2 + x + \alpha,\ \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

α. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν στην ευθεία x=2.

Μονάδες 7

β. Αν η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο τομής της με την ευθεία x=2 τέμνει τον άξονα y΄y στο $y_0 = -3$, τότε

i. να βρείτε το α και την εξίσωση της εφαπτομένης (ε).

Μονάδες 9

ii. να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, της εφαπτομένης (ε), του άξονα x΄x και της ευθείας $x = \frac{3}{5}$

Μονάδες 9

---2 ΓΕΛ ΥΜΗΤΤΟΥ---

ΕΣΠΕΡΙΝΑ ΛΥΚΕΙΑ

Κανονικές Εξετάσεις 2006

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - 4x + 13 = 0 \quad (1)$$

α. Να λυθεί στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών η εξίσωση (1).

Μονάδες 9

β. Αν z_1, z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), τότε να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης

$$A=\left|z_1\right|^2-2\left|z_1\cdot z_2\right|+\sqrt{13}\cdot\left|\overline{z_2}\right|+i^{2006}$$

Μονάδες 9

γ. Αν $z_1=2+3i$, τότε να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει:

$$\left|z-z_1\right|=5.$$

Μονάδες 7

---2 ΓΕΛ ΥΜΗΤΤΟΥ---

<u>Εξετάσεις Ελλήνων Εξωτερικού 2006</u>

<u>ΘΕΜΑ 2ο</u>

Έστω ότι για τον μιγαδικό αριθμό z ισχύει:

$$(5z-1)^5=(z-5)^5$$

α) Να δείξετε ότι $|5z-1|=|z-5|$.

Μονάδες 5

β) Να δείξετε ότι: $|z|=1$.

Μονάδες 10

γ) Αν $w=5z+1$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων M(w) στο μιγαδικό επίπεδο.

Μονάδες 10

---2 ΓΕΛ ΥΜΗΤΤΟΥ---

2007

ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΛΥΚΕΙΑ

Κανονικές εξετάσεις 2007

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός

$$z = \frac{2+\alpha i}{\alpha + 2i}, \quad \mu\varepsilon \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

α. Να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ =1.

Μονάδες 9

β. Έστω z_1, z_2 οι μιγαδικοί που προκύπτουν από τον τύπο

$$z = \frac{2+\alpha i}{\alpha + 2i}$$

για α = 0 και α = 2 αντίστοιχα.

i. Να βρεθεί η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2.

Μονάδες 8

ii. Να αποδειχθεί ότι ισχύει:

$$\left(z_1\right)^{2\nu} = \left(-z_2\right)^{\nu}$$

για κάθε φυσικό αριθμό ν.

Μονάδες 8

---2 ΓΕΛ ΥΜΗΤΤΟΥ--

Επαναληπτικές εξετάσεις 2007

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί

$z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \dfrac{2-\overline{z_1}}{2+z_1}$, όπου α, β$\in \mathbb{R}$ με β≠0.

Δίνεται επίσης ότι $z_2 - z_1 \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδειχθεί ότι $z_2 - z_1 = 1$.

Μονάδες 9

β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z_1 στο μιγαδικό επίπεδο.

Μονάδες 6

γ. Αν ο αριθμός z_1^2 είναι φανταστικός και αβ>0, να υπολογισθεί ο z_1 και να δειχθεί ότι

$$\left(z_1 + 1 + i\right)^{20} - \left(\overline{z_1} + 1 - i\right)^{20} = 0$$

Μονάδες 10

---2 ΓΕΛ ΥΜΗΤΤΟΥ--

ΕΣΠΕΡΙΝΑ ΛΥΚΕΙΑ

Κανονικές Εξετάσεις 2007

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = (\lambda\text{-}2) + 2\lambda i$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z.

Μονάδες 9

β. Αν ισχύει $z + \bar{z} = 2$ να βρείτε το $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)$.

Μονάδες 7

γ. Αν $|z| = 2$ και $\mathrm{Im}(z) \neq 0$, να βρείτε το λ.

Μονάδες 9

---2 ΓΕΛ ΥΜΗΤΤΟΥ---

Επαναληπτικές εξετάσεις 2007

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει $|z - 1 + i| = |iz|$.

α. **i)** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων Μ των μιγαδικών z.

Μονάδες 10

ii) Να βρείτε ποια από τα σημεία Μ απέχουν από την αρχή Ο(0,0) απόσταση ίση με 5 .

Μονάδες 10

β. Αν $\mathrm{Re}(z) = 0$, τότε να δείξετε ότι $z = -i$.

Μονάδες 5

---2 ΓΕΛ ΥΜΗΤΤΟΥ---

Εξετάσεις Ελλήνων Εξωτερικού 2007

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = i$, $z_2 = 1$ και $z_3 = 1 + i$.

α. Να αποδείξετε ότι: $|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_3|^2$.

Μονάδες 5

β. Αν για το μιγαδικό z ισχύει $|z - z_1| = |z - z_2|$, τότε να αποδείξετε ότι:

i. $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$.

Μονάδες 10

ii. για $z \neq 0$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A} = \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}$$

Μονάδες 10

---2 ΓΕΛ ΥΜΗΤΤΟΥ---

2008

ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΛΥΚΕΙΑ

Κανονικές εξετάσεις 2008

ΘΕΜΑ 2ο

Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν

$$\left|\left(i+2\sqrt{2}\right)z\right|=6 \text{ και } \left|w-(1-i)\right|=\left|w-(3-3i)\right|$$

τότε να βρείτε:

α. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z.

Μονάδες 6

β. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w.

Μονάδες 7

γ. την ελάχιστη τιμή του $|w|$

Μονάδες 6

δ. την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$

Μονάδες 6

--**2 ΓΕΛ ΥΜΗΤΤΟΥ**--

Επαναληπτικές εξετάσεις 2008

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_1=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2+\beta z+\gamma=0$, όπου β και γ πραγματικοί αριθμοί.

α. Να αποδείξετε ότι $\beta=-1$ και $\gamma=1$.

Μονάδες 9

β. Να αποδείξετε ότι $z_1^3=-1$

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού αριθμού w, για τον οποίο ισχύει:

$$|w|=\left|z_1-\overline{z_1}\right|$$

Μονάδες 8

--**2 ΓΕΛ ΥΜΗΤΤΟΥ**--

<u>ΕΣΠΕΡΙΝΑ ΛΥΚΕΙΑ</u>

<u>Κανονικές Εξετάσεις 2008</u>

<u>ΘΕΜΑ 2^ο^</u>

Δίνεται η εξίσωση $3z^2+\lambda z+\mu=0$, όπου λ,μ είναι πραγματικοί αριθμοί.

Α. Αν ο αριθμός $z_1=1+i$ είναι ρίζα της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι $\lambda=-6,\ \mu=6$ λ = –6, μ = 6 και να βρείτε τη δεύτερη ρίζα z_2 της εξίσωσης.

Μονάδες 14

Β. Να αποδείξετε ότι:

α. $z_1^2+z_2^2=0$

Μονάδες 6

β. $z_1^{2008}+z_2^{2008}=2^{1005}$

Μονάδες 5

--2 ΓΕΛ ΥΜΗΤΤΟΥ--

<u>Εξετάσεις Ελλήνων Εξωτερικού 2008</u>

<u>ΘΕΜΑ 2ο</u>

Α. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z=\kappa+(\kappa+1)i,\ \ \kappa\in\mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι η ευθεία $y=x+1$.

Μονάδες 6

β. Ποιοι από αυτούς τους μιγαδικούς αριθμούς έχουν $|z|=1$;

Μονάδες 9

Β. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α,β ισχύει $\alpha^2+\beta^2+8=(1-i)^4\beta-(1+i)^4\alpha$, να δείξετε ότι $\alpha=2$ και $\beta=-2$.

Μονάδες 10

--2 ΓΕΛ ΥΜΗΤΤΟΥ--

2009

ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΛΥΚΕΙΑ

Κανονικές εξετάσεις 2009

ΘΕΜΑ 2ο
Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς

$$\boxed{z = (2\lambda+1) + (2\lambda-1)i, \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

Α. α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 9

β. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_0 = 1 - i$ έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο.

Μονάδες 8

Β. Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί w οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση

$$|w|^2 + \overline{w} - 12 = z_0$$

όπου ο μιγαδικός αριθμός που αναφέρεται στο προηγούμενο ερώτημα.

Μονάδες 8

--2 ΓΕΛ ΥΜΗΤΤΟΥ--

Επαναληπτικές εξετάσεις 2009

ΘΕΜΑ 2$^{\text{ο}}$

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$(2-i)z + (2+i)\overline{z} - 8 = 0$$

α. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z = x + yi$ οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση.

Μονάδες 10

β. β. Να βρείτε τον μοναδικό πραγματικό αριθμό z_1 και τον μοναδικό φανταστικό αριθμό z_2 οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση.

Μονάδες 8

γ. Για τους αριθμούς z_1, z_2 που βρέθηκαν στο προηγούμενο ερώτημα να αποδείξετε ότι

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 40$$

Μονάδες 7

---2 ΓΕΛ ΥΜΗΤΤΟΥ---

ΕΣΠΕΡΙΝΑ ΛΥΚΕΙΑ

Κανονικές Εξετάσεις 2009

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 2 + 3i \;\text{ και }\; z_2 = (1-i)^2 + 3i^{2009} + 1$

α. Να αποδείξετε ότι $z_2 = 1 + i$.

Μονάδες 8

β. Να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού αριθμού $\overline{z_1} - z_2$.

Μονάδες 7

γ. Να εκφράσετε το πηλίκο $\frac{z_1}{z_2}$ στη μορφή $\kappa + \lambda i$, με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

---2 ΓΕΛ ΥΜΗΤΤΟΥ---

<u>Εξετάσεις Ελλήνων Εξωτερικού 2009</u>

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός

$$z = \frac{1}{1+i} - \frac{i(i-3)}{2}$$

α. Να αποδείξετε ότι:

$$-\overline{z} = -1 + i, \quad z^2 = 2i, \quad z^3 = -2 + 2i$$

Μονάδες 9

β. Αν Α, Β, Γ είναι οι εικόνες των μιγαδικών $-\overline{z}$, z^2, z^3 αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 9

γ. Να αποδείξετε ότι:

$$\left|z^3 - z^2\right|^2 = \left|z^2 + \overline{z}\right|^2 + \left|z^3 + \overline{z}\right|^2$$

Μονάδες 7

---2 ΓΕΛ ΥΜΗΤΤΟΥ---

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Α. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ

*Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

1. Όταν η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ με $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ και $\alpha\neq 0$ είναι αρνητική, τότε η εξίσωση δεν έχει ρίζες στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών.

2. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει: $|z_1+z_2|>|z_1|+|z_2|$.

3. Αν α,β είναι πραγματικοί αριθμοί τότε: $\alpha+\beta i=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ $\quad 0$.

4. Για δύο οποιουσδήποτε μιγαδικούς αριθμούς α+βi και γ+δi η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματός τους ισούται με τη διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

5. Για κάθε μιγαδικό z ισχύει $|z|=z\cdot\bar{z}$.

6. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει: $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$.

7. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z^2|=z^2$.

8. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί. Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες Μ(α,β) και Μ΄(α,–β) των συζυγών μιγαδικών z=α+βi και i β–αz=είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.

9. Αν z = x+yi, με x, y $\in\mathbb{R}$, τότε: $|\bar{z}|=|-z|$.

10. Αν z = α+βi, τότε: $z+\bar{z}=\alpha$, για κάθε α, β $\in\mathbb{R}$.

11. Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.

12. Οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών z, $\bar{z}$ είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα x΄x.

13. Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δυο μιγαδικών αριθμών είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

14. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει πάντα $\big||z_1|-|z_2|\big|\leq|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$.

15. Το μέτρο του μιγαδικού αριθμού z = x + yi, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί, δίνεται από τον τύπο

$$\boxed{|z|=\sqrt{x^2+y^2}}$$

16. Ο συζυγής κάθε μιγαδικού αριθμού z = x + yi, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί, είναι ο μιγαδικός

$$\bar{z}=-x+yi$$

17. Για τον μιγαδικό αριθμό z = α + βi με α, β $\in\mathbb{R}$ ισχύει z = 0 τότε και μόνον τότε, αν α = 0 και β = 0.

18. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z και κάθε θετικό ακέραιο ν, ισχύει: $|z^\nu|=z^\nu$.

19. Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών α+βi και γ+δi είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

Β. <u>ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ</u>

1. Αν $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$ είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

2. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι: $|z_1 \cdot z_2| > |z_1| \cdot |z_2|$.

3. Έστω Μ(x, y) η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z = x+yi στο μιγαδικό επίπεδο. Τι ορίζουμε ως μέτρο του z ;

4. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$.

5. Αν $\alpha + \beta i$,   i είναι μιγαδικοί αριθμοί όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι:

$$\frac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2} i .$$