ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΟΥΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ
12/10/09

ΕΠΩΝΥΜΟ-ΟΝΟΜΑ:

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός z για τον οποίο ισχύει

$$\boxed{z = \left|1+\sqrt{3}\ \mathrm{i}\right|\left(\text{συν}\theta+\mathrm{i}\,\text{ημ}\theta\right),\ \ \theta \in \mathbb{R}}$$

α) Να αποδείξετε ότι η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκεται πάνω στον κύκλο κέντρου $\mathrm{O}(0,0)$ και ακτίνας $\rho=2$.

(μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι $|z| = 2$ και $-2 \le \mathrm{Re}(z) \le 2$.

(μονάδες 10)

γ) Αν w_1 μιγαδικός αριθμός τέτοιος ώστε

$$1000\mathrm{z}\overline{\mathrm{w}_1} + 1009\overline{\mathrm{z}}\mathrm{w}_1 = 2009$$

να βρείτε το $|\mathrm{w}_1|$.

(μονάδες 10)

δ) Να δείξετε ότι: $-8 \le |z+1|^2 - |z-1|^2 \le 8$

(μονάδες 10)

ε) Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1 και z_2 με $z_1^2 + z_2^2 \ne 0$ των οποίων οι εικόνες ανήκουν στον κύκλο κέντρου $\mathrm{O}(0,0)$ και ακτίνας 2. Θεωρούμε επίσης τον μιγαδικό αριθμό

$$\mathrm{u} = \frac{2z_1z_2}{z_1^2 + z_2^2}$$

i) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός u είναι πραγματικός.

(μονάδες 10)

ii) Αν $\mathrm{u}=\mathrm{i}^{48} - \mathrm{i}^{58}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 και μηδέν είναι ισόπλευρο.

(μονάδες 20)

iii) Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς w για τους οποίους ισχύει :

$$|w|^2 + \overline{w} - 12 = \frac{|z_1^2| + |z_2^2|}{|2z_1z_2|} - \mathrm{i}\ .$$

(μονάδες 10)

στ) Αν για το μιγαδικό αριθμό v ισχύει ότι:

$$|3+4\mathrm{i} - 5\mathrm{v}| \le 5$$

να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του v και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί z και v έτσι, ώστε $z = \mathrm{v}$, όπου z είναι ο μιγαδικός αριθμός του ερωτήματος α.

(μονάδες 20)
