Μ Α Θ Η Μ Α Τ Ι Κ Α
Γ Ε Ν Ι Κ Η Σ   Π Α Ι Δ Ε Ι Α Σ
Β΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Α Λ Γ Ε Β Ρ Α

Κεφάλαιο 1ο: **ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ**

Ερωτήσεις του τύπου "Σωστό-Λάθος"

1. * Η συνάρτηση f (x) = εφx είναι περιοδική με περίοδο Τ = π. **Σ** **Λ**

2. * Η συνάρτηση f (x) = συνx είναι περιττή. **Σ** **Λ**

3. * Η συνάρτηση f (x) = σφx έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\{x \in R \mid ημx \neq 0\}$. **Σ** **Λ**

4. * Η συνάρτηση f (x) = ημx είναι γνησίως αύξουσα σε διάστημα πλάτους 2π. **Σ** **Λ**

5. * Η συνάρτηση f (x) = εφx έχει άπειρες κατακόρυφες ασύμπτωτες. **Σ** **Λ**

6. * Οι λύσεις της εξίσωσης ημx = 1 είναι $x = 2κπ + \frac{π}{2}$, κ ∈ Ζ. **Σ** **Λ**

7. * Οι λύσεις της εξίσωσης συνx = - 1 είναι x = (2κ + 1) π, κ ∈ Ζ. **Σ** **Λ**

8. * Οι λύσεις της εξίσωσης ημx = 0 είναι x = κπ, κ ∈ Ζ. **Σ** **Λ**

9. * Οι λύσεις της εξίσωσης συνx = 0 είναι $x = κπ + \frac{π}{2}$, κ ∈ Ζ. **Σ** **Λ**

10. * Η εξίσωση $ημx = \frac{1}{2}$ έχει λύσεις τις: $x = 2κπ + \frac{π}{6}$, $x = 2κπ + π - \frac{π}{6}$, κ ∈ Ζ. **Σ** **Λ**

11. * Η εξίσωση $συνx = -\frac{1}{2}$ έχει στο διάστημα $[\frac{π}{2}, π]$ λύση τη γωνία $\frac{2π}{3}$. **Σ** **Λ**

12. * Η εξίσωση $εφx = \sqrt{3}$ έχει λύσεις τις γωνίες $x = λπ - \frac{π}{3}$, λ ∈ Ζ. **Σ** **Λ**

13. * Ισχύει ημ (α + β) = ημα + ημβ. **Σ** **Λ**

14. * Ισχύει ημ (α + α) = 2ημασυνα. Σ Λ

15. ** Το κλάσμα $\frac{1 - συν2α}{2}$ έχει αρνητική τιμή για οποιαδήποτε γωνία α. Σ Λ

16. * Ισχύει: $2ημ^2φ - 1 = συν2φ$. Σ Λ

17. ** Ισχύει: $\frac{ημ\,(α + β)}{συνασυνβ} = εφα + εφβ$. Σ Λ

18. * Ισχύει: $εφ^2x = \frac{1 + συν2x}{1 - συν2x}$. Σ Λ

19. * Η συνάρτηση f (x) = 2ημ (x + π) έχει περίοδο Τ = π. Σ Λ

20. * Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ημ\,(x + \frac{π}{3})$ προκύπτει αν μετατοπίσουμε κατά $\frac{π}{3}$ τη γραφική παράσταση της g (x) = ημx οριζόντια και αριστερά. Σ Λ

21. * Το ελάχιστο της συνάρτησης f (x) = ημx + συνx είναι ίσο με $-\sqrt{2}$. Σ Λ

22. * Ο νόμος των ημιτόνων ισχύει μόνο για μη ορθογώνια τρίγωνα. Σ Λ

23. * Αν είναι γνωστές οι τρεις πλευρές ενός τριγώνου, μπορούμε να υπολογίσουμε τις γωνίες του, με το νόμο των συνημιτόνων. Σ Λ

24. * Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $ημΑ + ημΒ + ημΓ = \frac{α + β + γ}{2R}$. Σ Λ

25. * Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) ισχύει:
$\frac{β}{ημΒ} = \frac{γ}{ημΓ} = 2μ$ όπου μ η διάμεσος προς την υποτείνουσα. Σ Λ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. ***** Η συνάρτηση f (x) = συνx έχει πεδίο ορισμού

Α. το διάστημα (- 1, 1) **Β.** το διάστημα [- 1, 1]

Γ. το σύνολο $\{x \in R \mid x \neq 0\}$ **Δ.** το σύνολο $\{x \in R \mid x \neq \pm 1\}$

Ε. το σύνολο R

2. ***** Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f (x) = εφx είναι

Α. το σύνολο R **Β.** το διάστημα [- 1, 1]

Γ. το σύνολο $\{x \in R \mid$ ημx $\neq 0\}$ **Δ.** το σύνολο $\{x \in R \mid$ συνx $\neq 0\}$

Ε. το σύνολο $\{x \in R \mid x \neq 0\}$

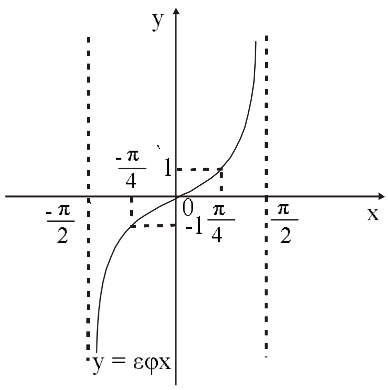
3. ***** Για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις f (x) = ημx, g (x) = συνx και h (x) = εφx, ισχύει

Α. η f είναι άρτια **Β.** η g είναι περιττή

Γ. η h είναι άρτια **Δ.** οι f και g είναι άρτιες

Ε. οι f και h είναι περιττές και η g άρτια

4. ***** Η συνάρτηση του σχήματος είναι



Α. γνησίως φθίνουσα στο $[0, \frac{\pi}{2})$

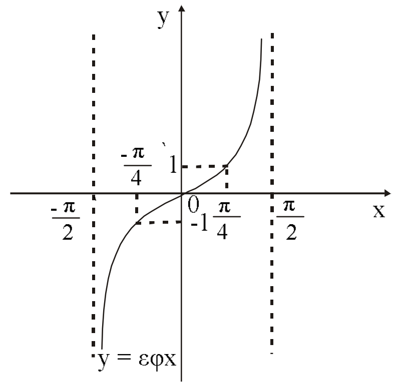
Β. γνησίως αύξουσα στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Γ. γνησίως φθίνουσα στο $(-\frac{\pi}{2}, 0]$

Δ. γνησίως φθίνουσα στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Ε. σταθερή στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

5. ****** Η λύση της εξίσωσης εφx = - 1 στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ είναι η

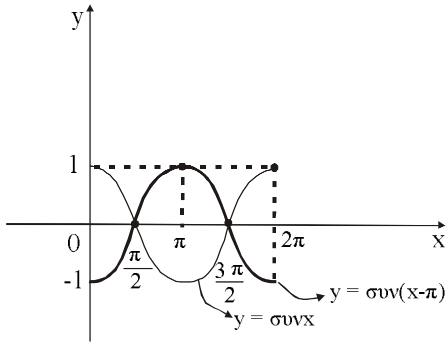


Α. x = - 1 **Β.** $x = \frac{\pi}{4}$

Γ. $x = -\frac{\pi}{4}$ **Δ.** x = 0

Ε. x = 1

6. ***** Η λύση της εξίσωσης
συν (x - π) = - 1
στο διάστημα (0, 2π] είναι η

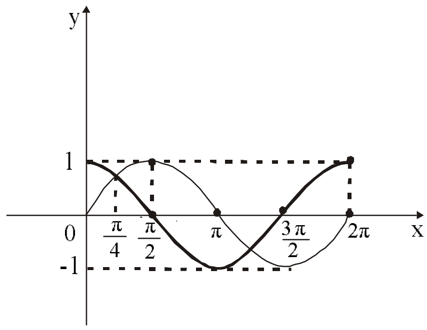


Α. $x = \frac{3\pi}{2}$ **Β.** x = π

Γ. x = 2π **Δ.** $x = \frac{\pi}{2}$

Ε. x = - π

7. ****** Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f (x) = ημx και g (x) = συνx στο διάστημα [0, 2π]. Οι λύσεις της εξίσωσης f (x) = g (x), $x \in [0, 2\pi]$ είναι

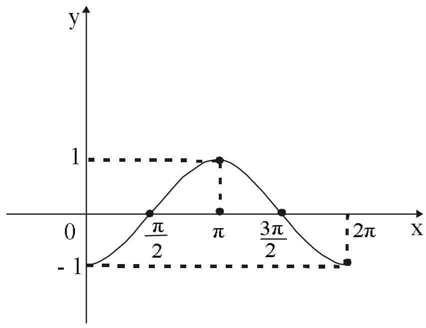


Α. $x = \frac{\pi}{2}$ ή $x = \frac{3\pi}{2}$

Β. x = π ή x = 2π **Γ.** $x = \frac{\pi}{4}$ ή $x = -\frac{\pi}{4}$

Δ. $x = \frac{\pi}{4}$ ή $x = \frac{3\pi}{2}$ **Ε.** $x = \frac{\pi}{4}$ ή $x = \frac{5\pi}{4}$

8. ** Στο διπλανό σχήμα, για $x \in [0, 2\pi]$ φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης



Α. $f(x) = συν2x$

Β. $f(x) = συν(x + 2\pi)$

Γ. $f(x) = συν(-x)$

Δ. $f(x) = -συνx$

Ε. $f(x) = συν(x + \frac{\pi}{2})$

9. * Οι λύσεις της εξίσωσης $ημx = -\frac{1}{2}$ είναι

Α. $x = 2κ\pi + \frac{\pi}{6}$

Β. $x = 2κ\pi - \frac{\pi}{6}$

Γ. $x = 2κ\pi + \frac{\pi}{6}$ ή $x = 2κ\pi + \frac{5\pi}{6}$ $\quad κ \in Z$

Δ. $x = 2κ\pi - \frac{\pi}{6}$ ή $x = 2κ\pi + \frac{7\pi}{6}$

Ε. καμία από τις προηγούμενες

10. * Οι λύσεις της εξίσωσης $συνx = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ είναι

Α. $x = 2κ\pi \pm \frac{\pi}{4}$ **Β.** $x = κ\pi \pm \frac{\pi}{4}$ **Γ.** $x = 2κ\pi \pm \frac{3\pi}{4}$

Δ. $x = 2κ\pi - \frac{\pi}{4}$ **Ε.** $x = (κ + 1)\pi \pm \frac{3\pi}{4}$ $\quad κ \in Z$

11. * Το ημ2α είναι ίσο με

Α. ημασυνα　**Β.** $2ημ^2α + 1$　**Γ.** 2ημασυνα

Δ. $1 - 2συν^2α$　**Ε.** κανένα από τα προηγούμενα

12. * Το συν2α είναι ίσο με

Α. $1 - 2συν^2α$　**Β.** $ημ^2α - συν^2α$　**Γ.** 1 - ημ2α

Δ. $1 - 2ημ^2α$　**Ε.** κανένα από τα προηγούμενα

13. * Αν εφβ = x και εφα = y, τότε εφ (α + β) είναι ίση με

Α. $\dfrac{x - y}{1 + xy}$　**Β.** $\dfrac{xy - 1}{x + y}$　**Γ.** $\dfrac{y + x}{1 - yx}$

Δ. $\dfrac{xy + 1}{x - y}$　**Ε.** $\dfrac{2y}{1 + x^2}$

14. * Η τιμή της παράστασης συν27°συν63° - ημ63°ημ27° είναι

Α. 1　**Β.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　**Γ.** 0

Δ. - 1　**Ε.** $\dfrac{1}{2}$

15. * Η τιμή του κλάσματος $\dfrac{2εφ15^{o}}{1 - εφ^2 15^{o}}$ είναι η

Α. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　**Β.** $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　**Γ.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Δ. $-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　**Ε.** καμία από τις προηγούμενες

16. ***** Η τιμή της παράστασης $\dfrac{εφ\dfrac{11π}{12} + εφ\dfrac{π}{12}}{1 - εφ\dfrac{11π}{12}\ εφ\dfrac{π}{12}}$ είναι η

Α. - 1 **Β.** 0 **Γ.** 1

Δ. $\sqrt{3}$ **Ε.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

17. ***** Η τιμή της παράστασης

ημ (50° - α) συν (40° + α) + ημ (40° + α) συν (50° - α) είναι:

Α. - 1 **Β.** 0 **Γ.** $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **Δ.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **Ε.** 1

18. ***** Αν Α = συνφσυνθ - ημφημθ και 45° < φ < 90°, 45° < θ < 90° τότε είναι

Α. Α > 0 **Β.** Α < 0 **Γ.** Α = 0

Δ. Α = 1 **Ε.** Α = $\dfrac{1}{2}$

19. ***** Αν $\dfrac{2π}{3} < α < π$ και x = 2ημασυνα είναι

Α. x = $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **Β.** x = 1 **Γ.** x = 0

Δ. x > 0 **Ε.** x < 0

20. ****** Αν x = 2ημασυνα και y = $συν^2α - ημ^2α$ τότε η παράσταση $x^2 + y^2$ είναι

Α. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **Β.** $\sqrt{3}$ **Γ.** $\dfrac{1}{2}$

Δ. 1 **Ε.** - 1

21. * Αν για τη γωνία Α τριγώνου ΑΒΓ ισχύει: $1 - 2ημ^2 \dfrac{A}{2} = 0$ τότε είναι

Α. Α = 30°　　**Β.** Α = 45°　　**Γ.** Α = 60°

Δ. Α = 90°　　**Ε.** Α > 90°

22. ** Αν $x = \dfrac{2εφ60^{o}}{1 - εφ^2 60^{o}}$, $y = \dfrac{2εφ30^{o}}{1 - εφ^2 30^{o}}$ τότε

Α. x = y　　**Β.** x = y = 0　　**Γ.** x > y

Δ. x = - y　　**Ε.** δεν ορίζονται τα x, y

23. * Αν για τις γωνίες Α, Β τριγώνου ΑΒΓ ισχύει: $2συν^2\dfrac{A}{2} - 1 = 1 - 2ημ^2 \dfrac{B}{2}$

τότε είναι

Α. Α > Β　　**Β.** Α < Β　　**Γ.** Α = 2Β

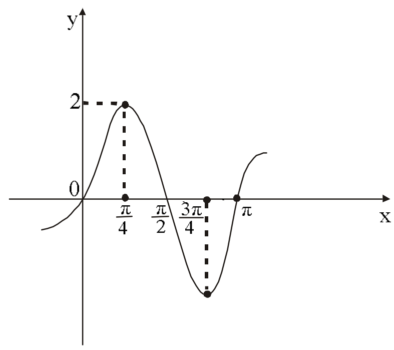
Δ. Α = Β　　**Ε.** 2Α = Β

24. ** Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f, φαίνεται στο σχήμα. Η συνάρτηση έχει τύπο

Α. f (x) = 2ημ2x　　**Β.** f (x) = 2ημx

Γ. f (x) = 2συν2x　　**Δ.** f (x) = ημ2x

Ε. f (x) = $ημ^2x$



25. * Από τους παρακάτω τύπους

(Ι) $συν2α = 1 - 2ημ^2α$　　**(ΙΙ)** $συνα = 1 - 2ημ^2 \dfrac{α}{2}$

(ΙΙΙ) $συν3α = 1 - 2ημ^2 \dfrac{3α}{2}$

σωστοί είναι

Α. μόνο ο (Ι)　　**Β.** μόνο ο (ΙΙ)　　**Γ.** ο (Ι) και ο (ΙΙ)

Δ. ο (Ι) και ο (ΙΙΙ) **Ε.** όλοι

26. ***** Δίνεται η συνάρτηση f (x) = $\sqrt{3}$ ημx - συνx. Η εξίσωση f (x) = 3

Α. έχει λύσεις τις x = κπ, κ ∈ Z

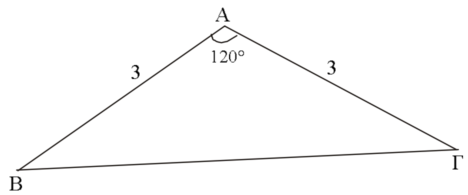
Β. αληθεύει για κάθε x ∈ R

Γ. είναι αδύνατη, γιατί το μέγιστο της συνάρτησης f είναι 2

Δ. έχει λύσεις τις $x = κπ + \frac{π}{2}$, κ ∈ Z

Ε. έχει λύση μόνο την x = 0

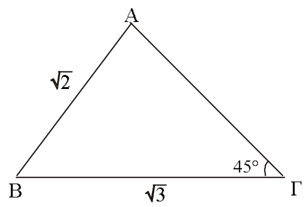
27. ***** Η πλευρά ΒΓ του τριγώνου του διπλανού σχήματος είναι



Α. $2\sqrt{3}$ **Β.** 6 **Γ.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Δ. $3\sqrt{3}$ **Ε.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

28. ****** Η γωνία Α του τριγώνου του διπλανού σχήματος είναι



Α. 30° **Β.** 45° **Γ.** 90°

Δ. 15° **Ε.** 60°

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. ** Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα (ΙΙ), ώστε σε κάθε εξίσωση της στήλης Α να αντιστοιχούν οι λύσεις της που βρίσκονται στη στήλη Β.

Πίνακας (Ι)

στήλη Α	στήλη Β
1. $ημx = ημ15°$ **2.** $ημx = \frac{1}{2}$ **3.** $συνx = 0$ **4.** $συνx = -\frac{1}{2}$ **5.** $εφx = \sqrt{3}$ **6.** $εφx = -1$	**Α.** $x = 2κπ \pm \frac{π}{4}$ **Β.** $x = κπ + \frac{π}{3}$ $\qquad κ \in Z$ **Γ.** $x = 360° κ \pm 120°$ **Δ.** $x = κπ - \frac{π}{4}$ **Ε.** $x = 360°κ + 15°$ ή $x = 360°κ + 165°$ **Ζ.** $x = κπ + \frac{π}{2}$ **Η.** $x = 2κπ + \frac{π}{6}$ ή $x = 2κπ + π - \frac{π}{6}$ **Θ.** $x = κπ + \frac{π}{4}$ **Ι.** $x = κπ - \frac{π}{3}$ **Κ.** $x = 360°κ - 15°$ ή $x = 360°κ + 195°$

Πίνακας (ΙΙ)

1	2	3	4	5	6

2. ***** Να συμπληρώσετε τον πίνακα (ΙΙ), ώστε κάθε τριγωνομετρικός αριθμός της στήλης Α να αντιστοιχεί στην παράσταση της στήλης Β, με την οποία είναι ίσος.

Πίνακας (Ι)

στήλη Α	**στήλη Β**
1. συν (y - x)	**Α.** συνxσυνy - ημxημy
	Β. ημyσυνx - ημxσυνy
2. ημ (x + y)	
	Γ. - ημyσυνx + ημxσυνy
3. συν (x + y)	**Δ.** ημyημx - συνxσυνy
	Ε. ημxσυνy + ημyσυνx
4. ημ (x - y)	
	Ζ. συνxσυνy + ημyημx

Πίνακας (ΙΙ)

1	**2**	**3**	**4**

3. ** Να συμπληρώσετε τον πίνακα (ΙΙ), ώστε κάθε τριγωνομετρικός αριθμός της στήλης Α να αντιστοιχεί στην παράσταση της στήλης Β, με την οποία είναι ίσος.

Πίνακας (Ι)

στήλη Α	στήλη Β
1. συν3x	**Α.** ημ14xημ3x - συν14xημ3x
	Β. συν3xσυν4x - ημ3xημ4x
2. ημ5x	**Γ.** ημ2xημx - συν2xσυνx
3. συν7x	**Δ.** συν3xσυν4x + ημ3xημ4x
	Ε. συν2xσυνx - ημ2xημx
4. ημ11x	**Ζ.** ημ3xσυν2x + ημ2xσυν3x
	Η. συν3xημ14x - ημ3xσυν14x

Πίνακας (ΙΙ)

1	2	3	4

4. ***** Να συμπληρώσετε τον πίνακα (ΙΙ), ώστε κάθε τριγωνομετρικός αριθμός της στήλης Α να αντιστοιχεί στην παράσταση της στήλης Β, με την οποία είναι ίσος.

Πίνακας (Ι)

στήλη Α	**στήλη Β**
1. εφ (α + β)	**Α.** $\dfrac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta - 1}{\sigma\varphi\alpha - \sigma\varphi\beta}$
	Β. $\dfrac{\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta}{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta - 1}$
2. σφ (α + β)	**Γ.** $\dfrac{\varepsilon\varphi\beta + \varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}$
3. σφ (α - β)	**Δ.** $\dfrac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta + 1}{\sigma\varphi\beta - \sigma\varphi\alpha}$
4. εφ (α - β)	**Ε.** $\dfrac{\varepsilon\varphi\beta - \varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi\beta\varepsilon\varphi\alpha}$
	Ζ. $\dfrac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta - 1}{\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta}$
	Η. $\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta}{1 + \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}$

Πίνακας (ΙΙ)

1	**2**	**3**	**4**

5. ***** Να συμπληρώσετε τον πίνακα (II), ώστε κάθε τριγωνομετρικός αριθμός της στήλης Α να αντιστοιχεί στην παράσταση της στήλης Β, με την οποία είναι ίσος.

Πίνακας (Ι)

στήλη Α	**στήλη Β**
1. $ημ^2α$	**Α.** $\frac{1 + συν2α}{1 - συν2α}$
2. $συν^2α$	**Β.** $\frac{1 - συν2α}{2}$
3. $εφ^2α$	**Γ.** $\frac{1 - συν2α}{1 + συν2α}$
	Δ. $\frac{συν2α - 1}{2}$
	Ε. $\frac{συν2α + 1}{2}$

Πίνακας (ΙΙ)

1	**2**	**3**

6. * Να συμπληρώσετε τον πίνακα (ΙΙ), ώστε κάθε παράσταση της στήλης Α να αντιστοιχεί στην ίση της που βρίσκεται στη στήλη Β.

Πίνακας (Ι)

στήλη Α	στήλη Β
	Α. συν (α + β) - συν (α - β)
1. 2ημασυνβ	**Β.** ημ (α + β) + ημ (α - β)
2. 2συνασυνβ	**Γ.** ημ (α + β) - ημ (α - β)
	Δ. ημ (α - β) - ημ (α + β)
3. 2ημαημβ	**Ε.** συν (α - β) + συν (α + β)
	Ζ. συν (α - β) - συν (α + β)

Πίνακας (ΙΙ)

1	2	3

Ερωτήσεις ανάπτυξης

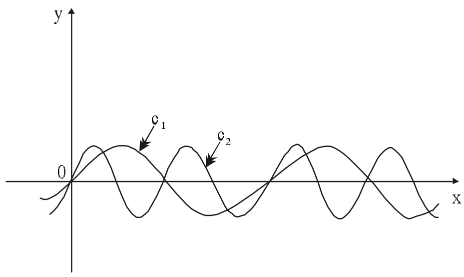
1. ** Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) ημx = - ημ25° β) ημx = ημ (2x + 20°)

γ) 3ημx + 5 = 0 δ) συν (x + 50°) = ημ (x + 20°)

ε) συνx = - συν30° ζ) $σφ^2x$ - 1 = 0

2. ** Η μουσική νότα που παράγεται από ένα μουσικό όργανο (π.χ. πιάνο) είναι ένας σύνθετος ήχος, ο οποίος είναι δυνατόν να αναλυθεί σε έναν βασικό, που μπορεί να αναπαρασταθεί με την καμπύλη



C_1: y = ημx και σε πολλούς άλλους, οι οποίοι ονομάζονται αρμονικοί και έχουν πολλαπλάσιες συχνότητες του βασικού. ένας αρμονικός είναι και αυτός που αναπαρίσταται με την καμπύλη C_2.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης C_2.

β) Να βρεθούν τα σημεία τομής των C_1, C_2 με τον άξονα x΄x.

γ) Να βρεθούν τα σημεία τομής των C_1, C_2.

3. ** Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης: συν33° συν12° - συν57° ημ12°

4. ** Να δειχθεί ότι:

α) $εφ\,(45° - ω) = \dfrac{συνω - ημω}{συνω + ημω}$

β) $εφ\,(α + β)\, εφ\,(α - β) = \dfrac{εφ^2 α - εφ^2 β}{1 - εφ^2 α\, εφ^2 β}$

5. ****** Να αποδείξετε ότι:

α) συνx + συν (120° + x) + συν (240° + x) = 0

β) συν (α + β) ημ (α - β) = ημασυνα - ημβσυνβ

γ) (συνx - ημx) εφ ($\frac{\pi}{4}$ + x) = συνx + ημx

6. ****** Να δείξετε ότι: ημ (x - y) + συν (x + y) = (ημx + συνx) (συνy - ημy)

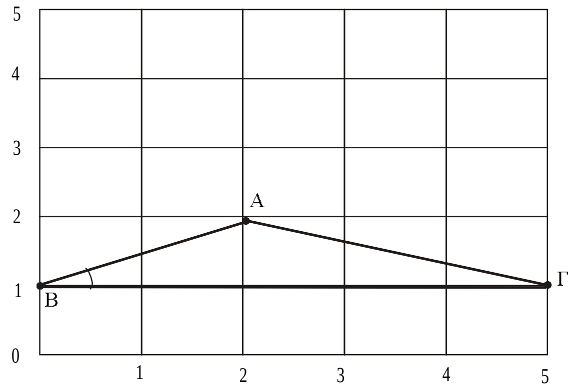
7. ****** Αν $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ και εφα = $\frac{1}{3}$ να βρεθεί η εφβ.

8. ****** Αν x - y = 60° και εφy = $\frac{2}{5}$ να βρεθεί η εφx.

9. ****** Αν $x, y \in (0, \frac{\pi}{2})$, εφx = $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ και εφy = $\frac{\sqrt{2}}{2}$, να δείξετε ότι:

$x - y = \frac{\pi}{4}$.

10. ****** Στο τρίγωνο ΑΒΓ να υπολογιστεί η γωνία Α.



11. ** Αν ημx + ημy = κ και συνx + συνy = λ, τότε:

α) να δείξετε ότι $συν(x - y) = \dfrac{κ^2 + λ^2 - 2}{2}$

β) για $κ = -\sqrt{2}$ και $λ = 1$ να βρείτε τη διαφορά x - y.

12. ** Αν συν (α + β) = συνασυνβ, τότε $ημ^2(α + β) = (ημα + ημβ)^2$.

13. ** Να δείξετε ότι

συν (45° - x) συν (45° - y) - ημ (45° - x) ημ (45° - y) = ημ (x + y).

14. ** Να δείξετε ότι $συν(α + β)\, συν(α - β) = συν^2α + συν^2β - 1$

15. ** Αν α + β + γ = 90° να αποδειχθεί ότι:

α) εφα εφβ + εφβ εφγ + εφγ εφα = 1

β) σφα + σφβ + σφγ = σφα σφβ σφγ

16. ** Αν α + β = γ να δείξετε ότι:

εφγ - εφα - εφβ = εφα εφβ εφγ

17. ** Αν $συνθ = -\dfrac{1}{3}$ και $\dfrac{π}{2} < θ < π$ να υπολογιστούν το ημ2θ και η εφ2θ.

18. ** Να αποδειχθούν οι ταυτότητες:

α) $\dfrac{ημ2x}{1 - συν2x} = σφx$

β) $\dfrac{1 + συν2x}{1 - συν2x} = σφ^2x$

γ) $\dfrac{ημ3α}{ημα} - \dfrac{συν3α}{συνα} = 2$

19. ****** Να δειχθεί ότι: $συν^4 4α - ημ^4 4α = συν8α$

20. ****** Να δείξετε ότι:

α) $εφ\left(\frac{π}{4} + α\right) - εφ\left(\frac{π}{4} - α\right) = 2εφ2α$

β) $\frac{1 + ημ2θ - συν2θ}{1 + ημ2θ + συν2θ} = εφθ$

γ) $\frac{1 + συν4α + συν2α}{ημ4α + ημ2α} = σφ2α$

21. ****** Δείξτε ότι: $\frac{εφ^2 2α - εφ^2 α}{1 - εφ^2 2α εφ^2 α} = εφ3α \,.\, εφα.$

22. ****** Να δείξετε ότι $\frac{ημ2α}{1 + συν2α} \frac{συνα}{1 + συνα} = εφ\frac{α}{2}$.

23. ****** Να δείξετε ότι $\frac{σφα + 1}{σφα - 1} = \frac{συν2α}{1 - ημ2α}$.

24. ****** Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $2ημ^2x - 3ημx + 1 = 0$

β) $2ημ^2θ = 3\,(1 - συνθ)$

γ) $συν2x - 4συνx - 5 = 0$

δ) $συν2x = συν^2x$

ε) $ημ2x = 2εφx$

ζ) $συνx = 2ημ\frac{x}{2} + 1$

η) $εφ^4x - 4εφ^2x + 3 = 0$

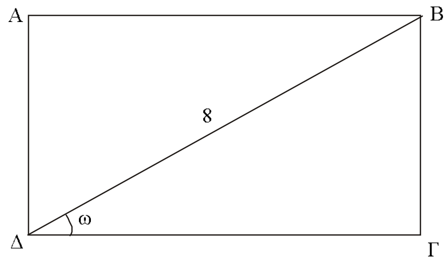
θ) $εφ\left(\frac{π}{4} - x\right) - εφ\left(\frac{π}{4} + x\right) = -2\sqrt{3}$

25. ** Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\dfrac{ημ2α - ημα}{συνα + συν2α}$ β) $\dfrac{συνα - συν5α - συν9α + συν13α}{ημα - ημ5α + ημ9α - ημ13α}$

26. ** Αν Α, Β, Γ γωνίες τριγώνου και συνΑ + συνΒ = ημΓ, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

27. ** Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ η διαγώνιος ΒΔ έχει μέτρο 8.



α) Να υπολογίσετε τις πλευρές ΒΓ και ΓΔ συναρτήσει της γωνίας ω.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία ω όταν η περίμετρος του ορθογωνίου παίρνει τη μέγιστη τιμή.

28. ** Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\sqrt{3}$ ημx + συνx = 0

β) ημx - $\sqrt{3}$ συνx = 2

γ) ημ2x + συν2x = $\sqrt{2}$

29. ** Να λυθεί στο διάστημα [0, π] η εξίσωση: $\sqrt{2}$ ημ2x + $\sqrt{2}$ συν2x = 1

30. ** Σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι Α = 120°.

α) Να δειχθεί ότι: $α^2 - βγ = β^2 + γ^2$

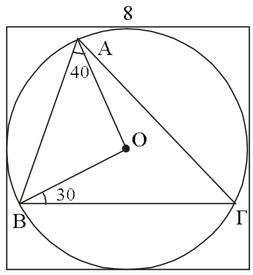
β) Αν α = $\sqrt{3}$ και β = $\sqrt{2}$ να βρεθούν οι γωνίες Β και Γ.

31. ** Στο διπλανό σχήμα να βρεθούν:

α) Οι γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

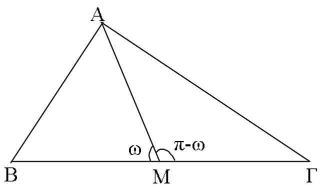
β) Οι πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ.

γ) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

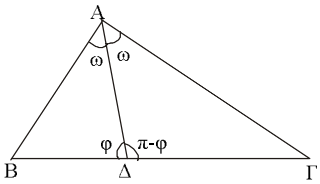


32. ** Με τη βοήθεια της Τριγωνομετρίας έχουμε τη δυνατότητα να αποδείξουμε πολλά θεωρήματα της Γεωμετρίας.

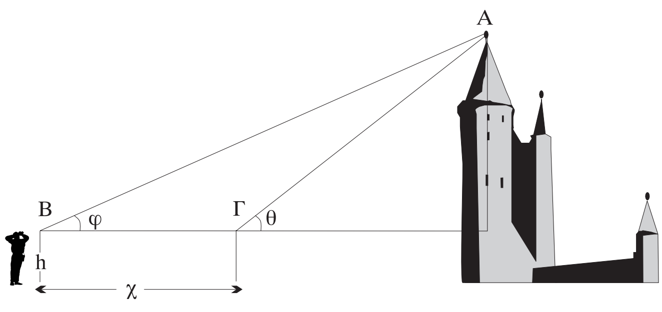
α) Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \dfrac{\alpha^2}{2}$ όταν μ_α είναι η διάμεσος ΑΜ.



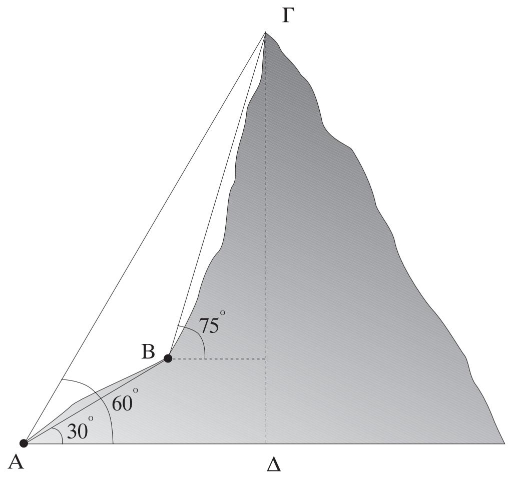
β) Αν ΑΔ διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ να δείξετε ότι $\dfrac{AB}{A\Gamma} = \dfrac{\Delta B}{\Delta\Gamma}$.



33. ** Ένας παρατηρητής βλέπει από τη θέση Β την κορυφή Α ενός απρόσιτου πύργου υπό γωνία φ. Αν πλησιάσει τον πύργο κατά x μέτρα βλέπει την κορυφή Α υπό γωνία θ. Να υπολογιστεί το ύψος του πύργου, αν γνωρίζουμε ότι ο οφθαλμός του παρατηρητή βρίσκεται σε ύψος h από το έδαφος.



34. ****** Ένας ορειβάτης βρίσκεται στους πρόποδες ενός βουνού στο σημείο Α και βλέπει την κορυφή Γ του βουνού υπό γωνία 60°. Όταν ανέβει στο σημείο Β βλέπει την κορυφή Γ υπό γωνία 75°. Αν η απόσταση ΒΓ = 1200 m και η γωνία ΒΑΔ = 30°, να υπολογιστεί το ύψος ΓΔ του βουνού.



Α Π Α Ν Τ Η Σ Ε Ι Σ - Υ Π Ο Δ Ε Ι Ξ Ε Ι Σ

Σ Τ Ι Σ Ε Ρ Ω Τ Η Σ Ε Ι Σ

Κεφάλαιο 1ο: ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου “Σωστό-Λάθος”

1.	Σ
2.	Λ
3.	Σ
4.	Λ
5.	Σ
6.	Σ
7.	Σ
8.	Σ

9.	Σ
10.	Σ
11.	Σ
12.	Λ
13.	Λ
14.	Σ
15.	Λ
16.	Λ
17.	Σ

18.	Λ
19.	Λ
20.	Σ
21.	Σ
22.	Λ
23.	Σ
24.	Σ
25.	Σ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1.	Ε
2.	Δ
3.	Ε
4.	Β
5.	Γ
6.	Γ
7.	Ε
8.	Δ
9.	Δ

10.	Γ
11.	Γ
12.	Δ
13.	Γ
14.	Γ
15.	Ε
16.	Β
17.	Ε
18.	Β
19.	Ε

20.	Δ
21.	Δ
22.	Δ
23.	Δ
24.	Α
25.	Ε
26.	Γ
27.	Δ
28.	Ε

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

1	Ε
2	Η
3	Ζ
4	Γ
5	Β
6	Δ

2.

1	Ζ
2	Ε
3	Α
4	Γ

3.

1	Ε
2	Ζ
3	Β
4	Η

4.

1	Γ
2	Ζ
3	Δ
4	Η

5.

1	Β
2	Ε
3	Γ

6.

1	Β
2	Ε
3	Ζ

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. **α)** $x = 360° \cdot κ - 25°$ ή $x = 360° \cdot κ + 205°$

β) $x = 360° \cdot κ - 20°$ ή $x = 120° \cdot κ + \frac{1}{3} \cdot 160°$

γ) αδύνατη $κ \in Z$

δ) συν $(x + 50°) =$ συν $(70° - x)$ κλπ.

ε) $x = 360° \cdot κ \pm 150°$

ζ) σφx = 1, άρα $x = κπ + \frac{π}{4}$ ή σφx = - 1, άρα $x = κπ - \frac{π}{4}$

2. **α)** C_2: y = ημ2x

β) Για την C_1: 0, π, 2π, 3π, … Για την C_2: 0, $\frac{π}{2}$, π, $\frac{3π}{2}$, 2π, …

γ) ημx = ημ2x, άρα x = 2κπ ή 3x = 2κπ + π για κ = 0, 1, 2, …

3. $ημ\,(57° - 12°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4. **α)** $εφ\,(45° - ω) = \frac{1 - εφω}{1 + εφω}$ και $εφω = \frac{ημω}{συνω}$

β) Εφαρμογή των τύπων

5. α) Εφαρμογή του τύπου του συν (α + β) και $συν120° = συν240° = -\frac{1}{2}$,

$ημ120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $ημ240° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. Εφαρμογή των τύπων και παραγοντοποίηση

7. εφ (α + β) = 1, άρα $\frac{\frac{1}{3} + εφβ}{1 - \frac{1}{3}εφβ} = 1$ και $εφβ = \frac{1}{2}$

8. Όμοια με την άσκηση 7

9. $εφx = 3 + 2\sqrt{2}$ άρα $εφ\,(x - y) = \dfrac{εφx - εφy}{1 + εφx \cdot εφy} = \dfrac{6 + 3\sqrt{2}}{6 + 3\sqrt{2}} = 1$,

δηλαδή $x - y = \dfrac{π}{4}$

10. Παρατηρούμε ότι $εφΒ = \dfrac{1}{2}$ και $εφΓ = \dfrac{1}{3}$, άρα $εφ\,(Β + Γ) = \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1$,

άρα $Β + Γ = 45°$, άρα $Α = 135°$

11. **α)** $ημ^2x + ημ^2y + 2ημxημy = κ^2$ και $συν^2x + συν^2y + 2συνxσυνxy = λ^2$
με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει η ζητούμενη σχέση

β) $συν\,(x - y) = \dfrac{1}{2}$

12. $συν\,(α + β) = συνασυνβ$, άρα $ημαημβ = 0$, δηλαδή $ημα = 0$ και $συνα = 1$ ή $ημβ = 0$ και $συνβ = 1$, σε κάθε περίπτωση ισχύει η αποδεικτέα

13. Για το α΄ μέλος να εφαρμόσετε τον τύπο $συνασυνβ - ημαημβ = συν\,(α + β)$.

14. $συν\,(α + β)\,συν\,(α - β) = συν^2α\,συν^2β - ημ^2α\,ημ^2β$ και $ημ^2α = 1 - συν^2α$,
$ημ^2β = 1 - συν^2β$

15. **α)** $εφ\,(α + β) = εφ\,(90° - γ) = σφγ = \dfrac{1}{εφγ}$ και εφαρμογή του τύπου της

$εφ\,(α + β)$

β) Αν στην ταυτότητα του (α) ερωτήματος θέσουμε $εφα = \frac{1}{σφα}$,

$εφβ = \frac{1}{σφβ}$ και $εφγ = \frac{1}{σφγ}$, προκύπτει η (β)

16. εφ (α + β) = εφγ και ανάπτυξη της ταυτότητας

17. $ημθ = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3}$ και ημ2θ = 2ημθσυνθ

18. **α)** Εφαρμογή των τύπων του διπλάσιου τόξου

β) Το πρώτο μέλος είναι το $\frac{1}{εφ^2 x}$

γ) $\frac{ημ3α}{ημα} - \frac{συν3α}{συνα} = 2\,\frac{ημ3α\,συνα - ημα\,συν3α}{2ημασυνα} = \frac{2ημ2α}{ημ2α} = 2$

19. $συν^4 4α - ημ^4 4α = (συν^2 4α - ημ^2 4α)\ 1 = συν8α$

20. α) Να χρησιμοποιήσετε τους τύπους για τις εφ (α + β) και εφ (α - β)

και ότι $εφ\,\frac{π}{4} = 1$

β) Να εκφράσετε τα ημθ2θ και συν2θ με ημθ και συνθ.

γ) Να εκφράσετε τα ημ4α και συν4α με ημ2α και συν2α.

21. Το πρώτο μέλος γράφεται $\frac{εφ2α + εφα}{1 - εφ2αεφα}\ \frac{εφ2α - εφα}{1 + εφ2αεφα} = εφ3αεφα$

22. Να εκφράσετε πρώτα το ημ2α και το συν2α με ημα και συνα χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες: ημ2α = 2ημασυνα και 1 + συν2α = 2συν^{2}α, και μετά το ημα και το συνα με ημ $\frac{α}{2}$ και συν $\frac{α}{2}$.

23. $\frac{σφα+1}{σφα-1} = \frac{συνα+ημα}{συνα-ημα} = \frac{συν^2α-ημ^2α}{(συνα-ημα)^2} = \frac{συν2α}{1-ημ2α}$

24. **ζ)** συνx = 1 - 2ημ^2 $\frac{x}{2}$, οπότε προκύπτει τριώνυμο ως προς ημ $\frac{x}{2}$

θ) Χρησιμοποιούμε τους τύπους για τις εφ (α + β) και εφ (α - β) και προκύπτει δευτεροβάθμια εξίσωση.

25. **α)** Να κάνετε τα αθροίσματα γινόμενα

β) Να ομαδοποιήσετε τα αθροίσματα και να τα μετατρέψετε σε γινόμενα.

26. Από τη δοσμένη προκύπτει: 2συν $\frac{A+B}{2}$ συν $\frac{A-B}{2}$ = 2ημ $\frac{Γ}{2}$συν$\frac{Γ}{2}$, αλλά συν $\frac{A+B}{2}$ = ημ $\frac{Γ}{2}$, άρα 2ημ$\frac{Γ}{2}$ [συν$\frac{A-B}{2}$ - συν $\frac{Γ}{2}$] = 0, άρα A - B = Γ, δηλαδή B + Γ = A = 90°

27. **α)** ΒΓ = 8ημω, ΓΔ = 8συνω

β) ΒΓ + ΓΔ = 8 (ημω + συνω) = 8$\sqrt{2}$ ημ ($\frac{π}{4}$ + ω). Η παράσταση μεγιστοποιείται όταν ημ ($\frac{π}{4}$ + ω) = 1, δηλαδή όταν ω = $\frac{π}{4}$

29. ημ2x + συν2x = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sqrt{2}$ ημ $(2x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ημ $(2x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$

ημ $(2x + \frac{\pi}{4}) =$ ημ $\frac{\pi}{6}$ κ.τ.λ.

31. **α)** Η επίκεντρη γωνία η αντίστοιχη της Α είναι 120°, άρα $\hat{A} = 60°$. Όμοια $\hat{\Gamma} = 50°$, άρα $\hat{B} = 70°$

β) R = 4, άρα α = 8ημ60°, β = 8ημ70°, γ = 8ημ50°

γ) $E = \frac{1}{2}$ βγημΑ = 32ημ70° ημ50° ημ60°

32. **α)** Στο τρίγωνο ΑΒΜ: $\gamma^2 = \mu_\alpha^2 + BM^2 - 2\mu_\alpha \cdot BM \cdot$ συνω

Στο τρίγωνο ΑΜΓ: $\beta^2 = \mu_\alpha^2 + M\Gamma^2 - 2\mu_\alpha \cdot M\Gamma \cdot$ συν (π - ω)

και πρόσθεση κατά μέλη

β) Στο τρίγωνο ΑΒΔ ισχύει: $\frac{B\Delta}{\text{ημω}} = \frac{AB}{\text{ημφ}}$

Στο τρίγωνο ΑΔΓ ισχύει: $\frac{\Delta\Gamma}{\text{ημω}} = \frac{A\Gamma}{\text{ημ}(\pi - \varphi)}$

και διαιρούμε κατά μέλη

33. Αρκεί να υπολογιστεί το ΑΔ, όπου Δ η προβολή του σημείου Α στην ΒΓ. Στο τρίγωνο ΑΔΓ ισχύει: ΑΔ = ΑΓ·ημθ

Στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\frac{A\Gamma}{\text{ημφ}} = \frac{B\Gamma}{\text{ημω}} = \frac{x}{\text{ημ}(\theta - \varphi)}$, άρα $A\Gamma = \frac{x\text{ημφ}}{\text{ημ}(\theta - \varphi)}$,

οπότε $A\Delta = \frac{x\text{ημφημθ}}{\text{ημ}(\theta - \varphi)}$

34. Στο τρίγωνο ΑΔΓ ισχύει: $\hat{A} = 60°$, άρα ΓΔ = ΑΓ·ημ60°.

Αρκεί να υπολογιστεί η ΑΓ.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\frac{1200}{ημ30} = \frac{ΑΓ}{ημB}$, όμως $\hat{B} = 360° - 225° = 135°$,

άρα ημΒ = $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Τελικά ΓΔ = $1200 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 600\sqrt{6}$

Κεφάλαιο 2ο: ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Ερωτήσεις του τύπου "Σωστό-Λάθος"

1.	* Οι πραγματικοί αριθμοί είναι σταθερά πολυώνυμα.	**Σ**	**Λ**
2.	* Το σταθερό πολυώνυμο 0 λέγεται μηδενικό πολυώνυμο.	**Σ**	**Λ**
3.	* Κάθε σταθερό και μη μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό μηδέν.	**Σ**	**Λ**
4.	* Το μηδενικό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.	**Σ**	**Λ**
5.	* Τα ίσα πολυώνυμα έχουν ίσες τιμές για όλες τις τιμές του x.	**Σ**	**Λ**
6.	* Ο βαθμός του γινομένου δυο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το γινόμενο των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.	**Σ**	**Λ**
7.	* Αν σε μια διαίρεση πολυωνύμων το υπόλοιπο είναι μηδέν, η διαίρεση λέγεται τέλεια.	**Σ**	**Λ**
8.	* Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το ρ, ισχύει $P(\rho) = 0$.	**Σ**	**Λ**
9.	* Αν τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ έχουν για ρίζα το ρ, τότε και το πολυώνυμο $P(x) + Q(x)$ έχει για ρίζα το ρ.	**Σ**	**Λ**
10.	* Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει για ρίζα το 1, τότε και το πολυώνυμο $P(x - 1)$ έχει για ρίζα το 1.	**Σ**	**Λ**
11.	* Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει για ρίζα το ρ, τότε το $P(-x)$ έχει για ρίζα το $-\rho$.	**Σ**	**Λ**
12.	* Αν σε μια διαίρεση πολυωνύμων που δεν είναι τέλεια, ο διαιρέτης είναι τρίτου βαθμού, τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι ακριβώς δευτέρου βαθμού.	**Σ**	**Λ**
13.	* Αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρεθεί με το $x - \rho$ και η διαίρεση είναι τέλεια, τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : \kappa(x - \rho)$, $\kappa \in R^*$ είναι κ.	**Σ**	**Λ**

14. * Ένα πολυώνυμο P (x) βαθμού κ διαιρούμενο με το Q (x) βαθμού μ (κ > μ) δίνει υπόλοιπο 0. Τότε κάθε ρίζα του P (x) είναι ρίζα του Q (x). **Σ** **Λ**

15. * Το πολυώνυμο $P(x) = x^6 + 3x^4 + x^2 + 5$ διαιρούμενο με το διώνυμο x - ρ δίνει υπόλοιπο 0. **Σ** **Λ**

16. * Αν ένα πολυώνυμο P (x) διαιρείται με το $(x - ρ)^2$ και η διαίρεση είναι τέλεια, τότε ισχύει P (ρ) = 0. **Σ** **Λ**

17. * Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^6 + (x - 1)^2 + 5$ βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα x΄x. **Σ** **Λ**

18. * Η εξίσωση $x^{14} + 3x^{12} + 7 = 0$ έχει ρίζα ακέραιο αριθμό. **Σ** **Λ**

19. * Αν η εξίσωση $\sqrt{x - 2} = α + x$, $α \in R^*$ έχει λύση τον αριθμό ρ, τότε ισχύει $ρ \geq 2$. **Σ** **Λ**

20. * Η εξίσωση $\sqrt{x - 1} - \sqrt{1 - x} = 0$ είναι αδύνατη. **Σ** **Λ**

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Το πολυώνυμο $P(x) = 3(x - 1)^2 - 3x^2 + 5$ είναι

Α. μηδενικού βαθμού **Β.** πρώτου βαθμού **Γ.** δευτέρου βαθμού

Δ. το μηδενικό πολυώνυμο **Ε.** τρίτου βαθμού

2. Αν το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^2 - 4)x^2 + (\lambda - 2)x - (\lambda + 2)$, $\lambda \in R$ είναι πρώτου βαθμού τότε το λ είναι

Α. - 2 **Β.** - 1 **Γ.** 0 **Δ.** 1 **Ε.** $\sqrt{2}$

3. Το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^2 - 1)x^3 + (1 - \lambda)x^2 - (\lambda + 1)x + \lambda + 8$ είναι σταθερό πολυώνυμο, όταν το λ ισούται με

Α. - 1 **Β.** 0 **Γ.** 1

Δ. για κάθε $\lambda \in R$ **Ε.** για καμία τιμή του $\lambda \in R$

4. Το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^5 - 1)x^3 + (\lambda^2 - 3\lambda + 2)x + \lambda - 1$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο όταν ο πραγματικός αριθμός λ ισούται με

Α. - 1 **Β.** 0 **Γ.** 1 **Δ.** - 5 **Ε.** 5

5. Αν το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^\nu - 1)x^5 + (1 - \lambda)x + 8$, $\lambda \in R$ είναι μηδενικού βαθμού, τότε το πολυώνυμο $q(x) = (\lambda^3 - 1)x^3 - (1 - \lambda^2)x^2 + (\lambda + 1)x - (1 - \lambda)$ είναι

Α. τρίτου βαθμού **Β.** δευτέρου βαθμού **Γ.** πρώτου βαθμού

Δ. μηδενικού βαθμού **Ε.** το μηδενικό πολυώνυμο

6. Τα πολυώνυμα $P(x) = x^3 - \beta x + 5$ και $Q(x) = x^3 + \beta x^2 + 5 - \beta$, $\beta \in R$ είναι ίσα όταν ο β ισούται με

Α. - 1 **Β.** 0 **Γ.** 1 **Δ.** 5 **Ε.** - 5

7. Αν τα πολυώνυμα $P(x) = \lambda^{\nu+1} x^{\nu} + (2\lambda - 3) x^2 + x - 1$ και $q(x) = \lambda x^{1998} - 3x^2 + x - (\lambda + 1)$
είναι ίσα, τότε ο πραγματικός αριθμός λ είναι

Α. 1 **Β.** - 1 **Γ.** 0 **Δ.** 1998

Ε. κάθε πραγματικός αριθμός

8. Το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_{\nu}x^{\nu} + \alpha_{\nu-1}x^{\nu+1} + ... + \alpha_0$ έχει για ρίζα το μηδέν. Τότε για το α_0 ισχύει

Α. $\alpha_0 > 0$ **Β.** $\alpha_0 < 0$ **Γ.** $\alpha_0 = \alpha_{\nu}$ **Δ.** $\alpha_0 = 0$

Ε. κανένα από τα προηγούμενα

9. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι ψευδής;

Α. Αν $P(\rho) = 0$ τότε το ρ είναι ρίζα του $P(x)$

Β. Κάθε σταθερό και μη μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό μηδέν

Γ. Για το μηδενικό πολυώνυμο δεν ορίζεται βαθμός

Δ. Ο βαθμός του γινομένου δυο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το γινόμενο των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

Ε. Τα ίσα πολυώνυμα έχουν ίσες τιμές για όλες τις τιμές του x

10. Έστω $P(x)$ σταθερό πολυώνυμο και $P(2) = 5$. Τότε το $P(-2)$ ισούται με

Α. 5 **Β.** - 5 **Γ.** 2 **Δ.** - 2 **Ε.** 0

11. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^{1998} + 1$. Αν $P(\alpha + 1997) = 1$, τότε για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει

Α. $\alpha > 1997$ **Β.** $\alpha > 1998$ **Γ.** $\alpha = 1997$

Δ. $\alpha = -1997$ **Ε.** κανένα από τα προηγούμενα

12. Αν για το πολυώνυμο $P(x)$ ισχύει: $(x^2 - 1) . P(x) = x^6 - 2x^4 + 5x - 8$, τότε το $P(x)$ είναι

Α. τρίτου βαθμού **Β.** τέταρτου βαθμού **Γ.** πέμπτου βαθμού

Δ. έκτου βαθμού **Ε.** κανένα από τα προηγούμενα

13. Αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το - 2, τότε διαιρείται με το διώνυμο

Α. x - 2 **Β.** x + 2 **Γ.** 2x + 1 **Δ.** 2x - 1 **Ε.** 2 - x

14. Αν ένα πολυώνυμο P (x) έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και - 1, τότε διαιρείται με τα διώνυμα

Α. x - 2 και x - 1 **Β.** x + 2 και x - 1 **Γ.** x + 2 και x + 1

Δ. x - 2 και x + 1 **Ε.** 2x - 1 και 2x + 1

15. Αν η διαίρεση ενός πολυωνύμου P (x) με το διώνυμο 2x + 1 είναι τέλεια, τότε το P (x) έχει ρίζα του τον αριθμό

Α. 2 **Β.** - 2 **Γ.** 1 **Δ.** $-\frac{1}{2}$ **Ε.** $\frac{1}{2}$

16. Αν ένα πολυώνυμο πέμπτου βαθμού διαιρείται με ένα τρίτου βαθμού, τότε το πηλίκο είναι

Α. το πολύ δευτέρου βαθμού **Β.** τουλάχιστον δευτέρου βαθμού

Γ. ακριβώς δευτέρου βαθμού **Δ.** ακριβώς τρίτου βαθμού

Ε. τουλάχιστον τρίτου βαθμού

17. Αν σε μια διαίρεση πολυωνύμων που δεν είναι τέλεια, ο διαιρέτης είναι τρίτου βαθμού, τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι

Α. τουλάχιστον τρίτου βαθμού

Β. ακριβώς τρίτου βαθμού

Γ. ακριβώς δευτέρου βαθμού

Δ. το πολύ δευτέρου βαθμού

Ε. τουλάχιστον δευτέρου βαθμού

18. Το πολυώνυμο $P(x) = x^8 + x^4 + x^2 + 3$ το διαιρούμε με το διώνυμο x - ρ. Αν είναι υ το υπόλοιπο αυτής της διαίρεσης, τότε

Α. $υ > 0$ **Β.** $υ < 0$ **Γ.** $υ = 0$ **Δ.** $υ \leq 0$

Ε. κανένα από τα προηγούμενα

19. Αν ένα πολυώνυμο P (x) διαιρεθεί με το x - ρ και η διαίρεση είναι τέλεια, τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης του P (x) : κ (x - ρ), $\kappa \in R^*$ είναι

Α. κ   **Β.** - κ   **Γ.** 0

Δ. - κρ   **Ε.** κρ

20. Αν ένα πολυώνυμο P (x) διαιρούμενο με το Q (x) δίνει υπόλοιπο 0 [ο βαθμός του P (x) είναι μεγαλύτερος του βαθμού του Q (x)], τότε

Α. Κάθε ρίζα του P (x) είναι και ρίζα του Q (x)

Β. Αν ρ δεν είναι ρίζα του Q (x) τότε δεν είναι ρίζα και του P (x)

Γ. Ο ρ είναι ρίζα του Q (x) αν και μόνο αν ο ρ είναι ρίζα του P (x)

Δ. Κάθε ρίζα του Q (x) είναι και ρίζα του P (x)

Ε. Το P (x) έχει ρίζες μόνο τις ρίζες του Q (x)

21. Για ποιο από τα παρακάτω πολυώνυμα μπορείτε με βεβαιότητα και χωρίς δοκιμή να πείτε ότι δεν μπορεί να έχει παράγοντα της μορφής x - ρ;

Α. $x^3 - 2x^2 + x - 1$ **Β.** $4x^5 - 1$

Γ. $2x^4 - x^2 + x - 7$ **Δ.** $x^6 - x^4 + 2x^2 - 9$ **Ε.** $x^8 + 2x^6 + 5$

22. Το πολυώνυμο P (x) (βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του τρία) διαιρείται με το $(x - \rho)^3$ και η διαίρεση είναι τέλεια. Το υπόλοιπο της διαίρεσης P (x) : (x - ρ) είναι

Α. - 3   **Β.** - 1   **Γ.** 0   **Δ.** 1   **Ε.** 3

23. Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις δεν έχει ρίζα ακέραιο αριθμό

Α. $x^2 - 5x + 6 = 0$ **Β.** $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$

Γ. $3x^4 - 2x^3 + x - 2 = 0$ **Δ.** $3x^4 + x^2 + 7 = 0$

Ε. $2x^3 + x + 3 = 0$

24. Ποιας συνάρτησης η γραφική παράσταση αποκλείεται να τέμνει τον άξονα x΄x

Α. $f(x) = (x - 2)^2 + 2x - 4$ **Β.** $g(x) = x^3 - 3x$

Γ. $h(x) = x^4 - 3x^2 + 2$ **Δ.** $k(x) = x^5 - 5x + 4$

Ε. $\Phi(x) = (x + 1)^4 + x^2 + 5$

25. Για ποιας συνάρτησης τη γραφική παράσταση μπορείτε να πείτε με βεβαιότητα και χωρίς καμιά δοκιμή ότι βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα x΄x

Α. $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$ **Β.** $g(x) = x^2 - 5x$

Γ. $h(x) = (x^3 - 1)^2 + x^4$ **Δ.** $k(x) = (x - 1)^2 - 2$

Ε. $\Phi(x) = x^4 + x^2 - 2$

26. Η εξίσωση $x^3 - 3x^2 + \kappa x + 2 = 0$, $\kappa \in Z$ αποκλείεται να έχει ακέραια ρίζα τον αριθμό

Α. -1 **Β.** 1 **Γ.** -2 **Δ.** 2 **Ε.** 3

27. Αν η εξίσωση $x^3 + \beta x^2 - x + \alpha = 0$, $\alpha, \beta \in Z$, έχει ρίζα το 3, τότε ο α αποκλείεται να ισούται με

Α. 6 **Β.** 10 **Γ.** 12 **Δ.** 15 **Ε.** 18

28. Η εξίσωση $\sqrt{3 - x} = x + \kappa$, $\kappa \in R^*$ αποκλείεται να έχει ρίζα τον αριθμό

Α. 1 **Β.** -1 **Γ.** $\frac{2}{3}$ **Δ.** 4 **Ε.** $\frac{5}{4}$

29. Για να δεχθούμε το ρ για ρίζα της εξίσωσης $\sqrt{5 - x} = \kappa^2 x$, $\kappa \in R^*$ πρέπει

Α. $\rho \in (0, +\infty)$ **Β.** $\rho \in (-\infty, 0)$ **Γ.** $\rho \in [5, +\infty)$

Δ. $\rho \in (-\infty, 5]$ **Ε.** $\rho \in [0, 5]$

30. Αν η εξίσωση $\sqrt{x - 3} + \sqrt{\kappa - x} = \alpha$, $\alpha \in R$, έχει οπωσδήποτε λύση, ποια τιμή δεν μπορεί να πάρει ο $\kappa \in R^*$;

Α. 2 **Β.** 3 **Γ.** 4 **Δ.** 5 **Ε.** 6

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. Δίνονται τα πολυώνυμα: $P(x) = x^3 - 2x$, $Q(x) = x^2 - 3x - 1$. Να βρεθούν:
α) $P(x) + Q(x)$
β) $P(x) - Q(x)$
γ) $P(x) \,.\, Q(x)$

2. Να βρεθεί η τιμή του $\lambda \in R$ για την οποία το πολυώνυμο:
$P(x) = (\lambda + 2)x^3 - (\lambda^2 + \lambda - 2)x + \lambda^2 - 4$
να είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

3. Αν $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$ και $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, δείξτε ότι το πολυώνυμο
$P(x) = (\alpha - \beta)x^2 + (\beta - \gamma)x + \gamma - \alpha$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

4. Να δειχθεί ότι το πολυώνυμο $P(x) = (\kappa - 2)x^2 + (2\lambda + 6)x + \kappa + \lambda - 3$
είναι διάφορο του μηδενικού.

5. Να βρεθεί για ποιες τιμές των κ, λ, μ είναι ίσα τα πολυώνυμα:
$P(x) = \lambda x^2 - (\lambda - \kappa)x + \mu - 2\lambda$
$Q(x) = (\mu - \lambda)x^2 + 4x + \kappa + \lambda$.

6. Να προσδιοριστεί ο $\alpha \in R$ ώστε το πολυώνυμο
$P(x) = 9x^3 - 3x^2 + 8x - 27$
να παίρνει τη μορφή $\alpha(x^3 + x) - 3x^2 + (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$.

7. Να βρεθεί πολυώνυμο Κ (x) τέτοιο ώστε το τετράγωνό του να ισούται με το:
$P(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$.

8. Να δειχθεί ότι για κάθε $\kappa \in R$ το πολυώνυμο
$P(x) = (\kappa - 1)x^5 + (3\kappa^2 + 2)x^3 + \kappa x$ δεν έχει ρίζα το $\frac{1}{2}$.

9. Αν το πολυώνυμο $P(x) = x^2 + (\alpha - 1)x + 2\alpha$ έχει ρίζα το -1 αποδείξτε ότι το ίδιο ισχύει και για το $K(x) = x^3 + 4x^2 + (\alpha^2 - 1)x$. Το αντίστροφο ισχύει;

10. Να βρεθεί πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει:
$(x^2 + 1)P(x) = 3x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 3$

11. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^2 + 2x + 5$. Να προσδιοριστεί ο πραγματικός αριθμός α αν ισχύει: $P(\alpha - 1) = 13$.

12. Να γίνουν οι διαιρέσεις:
α) $(2x^5 - x^3 + 2x^2 - 9) : (x^2 - 1)$
β) $(x^4 - 7x^3 + 2x - 15) : (x^3 + 5)$
γ) $(3x^3 - 4\alpha x + \alpha^2) : (x - 2\alpha)$
δ) $[7x^3 - (9\alpha + 7\alpha^2)x + 9\alpha^2] : (x - \alpha)$

13. Να βρείτε το πολυώνυμο $f(x)$ το οποίο όταν διαιρεθεί με το $x^2 + 1$, δίνει πηλίκο $3x - 1$ και υπόλοιπο $2x + 5$.

14. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ ώστε αν το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + 1$ διαιρεθεί με το πολυώνυμο $x^2 + \kappa x + \lambda$ να αφήνει υπόλοιπο 0.

15. Αν το πολυώνυμο $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 4$ διαιρείται ακριβώς με το $x - 2$ και εάν επιπλέον $f(1) = 8$, να προσδιοριστούν τα α, β.

16. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 - 13x + \beta$. Αν το $P(x)$ διαιρείται με το $x^2 - x - 6$, να προσδιορίσετε τα $\alpha, \beta \in R$.

17. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \lambda^2 x^2 + 2(\lambda^2 - 3\lambda + 1)x - 3(4\lambda + 1)$. Δείξτε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x + 2)$ είναι ανεξάρτητο του λ.

18. Να αποδείξετε ότι αν το πολυώνυμο P (x) έχει παράγοντα το x - 5, τότε το πολυώνυμο P (2x - 3) έχει παράγοντα το x - 4.

19. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε τα πηλίκα και τα υπόλοιπα των διαιρέσεων:

α) $(x^3 - 2x^2 + 5x - 6) : (x - 2)$

β) $(2x^5 - x^4 + 6x^2 + 3) : (x + 1)$

γ) $[6x^3 - (2\alpha + 6\alpha^2) x + 3\alpha^2] : (x - \alpha),\ \alpha \in R$

δ) $(x^6 - 4x^5 + x^2 - 2) : (2x - 1)$

ε) $(x^5 - \frac{1}{\lambda^2} x^3 + \lambda x^2 - 2) : (\lambda x + 1),\ \lambda \in R^*$

20. Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί κ, λ ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - \kappa x^2 + (\lambda - 1) x + 5$ να έχει για παράγοντα το $(x - 1)(x + 2)$.

21. Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 - (3 + \alpha) x + \beta + 10$ να έχει για παράγοντα το $(x - 2)^2$.

22. Το πολυώνυμο P (x) διαιρούμενο με x - 2 αφήνει υπόλοιπο 10 και διαιρούμενο με x + 3 αφήνει υπόλοιπο 5. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του P (x) με το (x - 2) (x + 3).

23. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι ακέραιες λύσεις των εξισώσεων:

α) $x^3 - 8x + 7 = 0$

β) $x^4 - 5x^3 + 6x^2 + x - 2 = 0$

γ) $(x^3 - 2x) x + x + 2 = 0$

δ) $(x - 1)(x^4 + 4) - 3(x + 4) = 0$

ε) $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0$

24. Αν κ ακέραιος αριθμός να δειχθεί ότι η εξίσωση: $5x^{2\nu} + 9\kappa x - 1 = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

25. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0$

β) $x^3 + 3x \geq 5x^2 - 9$

γ) $3x^4 - x^3 - 9x^2 + 9x - 2 \leq 0$

δ) $x^4 - 3x^3 + 6x \leq 4$

26. Δίνεται η εξίσωση $x^5 - αx^3 + βx^2 + x - 1 = 0$. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε η εξίσωση να έχει το ανώτερο δυνατό πλήθος ακέραιων ριζών.

27. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

β) $(x^2 + 3x - 2)^6 - 9\,(x^2 + 3x - 2)^3 + 8 = 0$

γ) $(x + 2)^8 - 3\,(x + 2)^4 - 4 = 0$

δ) $\left(\dfrac{x - 1}{x}\right)^2 - 5\left(\dfrac{x - 1}{x}\right) + 6 = 0$

28. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\dfrac{x}{x - 1} + \dfrac{x + 2}{x + 1} = \dfrac{2}{x^2 - 1}$ β) $\dfrac{x^2 + 2x - 4}{x - 2} = x^2$

29. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\dfrac{x^3 + 2x - 4}{x - 2} < 1$ β) $\dfrac{x^2}{x + 1} - \dfrac{4}{x - 1} \leq \dfrac{2}{x^2 - 1}$

30. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $(2ημx - 1)^4 + 6\,(2ημx - 1)^2 - 7 = 0$

β) $2ημ^3x + 5ημ^2x + 5ημx + 2 = 0$

γ) $2συν^4x - 5συν^3x + 5συνx - 2 = 0$

31. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\sqrt{x-3} = 5$

β) $x - \sqrt{25-x^2} = 1$

γ) $\sqrt{x} - \sqrt{x+1} = 2$

δ) $2\sqrt{5-4x} = 5-4x$

ε) $\sqrt{x^2-x+5} = x-3$

32. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\sqrt{x-2} < \sqrt{2x+1}$

β) $\sqrt{4x+1} < \sqrt{1-2x}$

Α Π Α Ν Τ Η Σ Ε Ι Σ - Υ Π Ο Δ Ε Ι Ξ Ε Ι Σ

Σ Τ Ι Σ Ε Ρ Ω Τ Η Σ Ε Ι Σ

Κεφάλαιο 2ο: ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου "Σωστό-Λάθος"

1.	Σ	8.	Σ	15.	Λ
2.	Σ	9.	Σ	16.	Σ
3.	Σ	10.	Λ	17.	Σ
4.	Λ	11.	Σ	18.	Λ
5.	Σ	12.	Λ	19.	Σ
6.	Λ	13.	Λ	20.	Λ
7.	Σ	14.	Λ		

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1.	Β	11.	Δ	21.	Ε
2.	Α	12.	Β	22.	Γ
3.	Ε	13.	Β	23.	Δ
4.	Γ	14.	Δ	24.	Ε
5.	Γ	15.	Δ	25.	Γ
6.	Β	16.	Γ	26.	Ε
7.	Γ	17.	Δ	27.	Β
8.	Δ	18.	Α	28.	Δ
9.	Δ	19.	Γ	29.	Δ
10.	Α	20.	Δ	30.	Α

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. **α)** $x^3 + x^2 - 5x - 1$

β) $x^3 - x^2 + x + 1$

γ) $x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 2x$

2. $\lambda = -2$

3. Εφαρμόζουμε την ταυτότητα:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)\,[(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2]$$

και επειδή $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ είναι $\alpha = \beta = \gamma$ κλπ.

4. Δεν υπάρχει τιμή των πραγματικών αριθμών κ, λ ώστε να μηδενίζονται συγχρόνως οι συντελεστές $\kappa - 2$, $2\lambda + 6$, $\kappa + \lambda - 3$.

5. $\kappa = 2$, $\lambda = -2$, $\mu = -4$

6. $\alpha = 8$

7. Το $K(x)$ πρέπει να είναι 2ου βαθμού.

Έστω $K(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$

$(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)^2 = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$

Εκτελώντας τις πράξεις βρίσκουμε: $\alpha = \pm 1$, $\beta = \pm 1$, $\gamma = \mp 2$

8. Πρέπει $P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Βρίσκουμε $12\kappa^2 + 17\kappa + 7 = 0$ και επειδή $\Delta < 0$, δεν υπάρχει $\kappa \in R$ ώστε το $\frac{1}{2}$ να είναι ρίζα του πολυωνύμου.

9. Ισχύει $P(-1) = 0$. Βρίσκουμε $\alpha = -2$. Για $\alpha = -2$ ισχύει και $K(-1) = 0$, άρα το -1 είναι ρίζα του $K(x)$.
Το αντίστροφο δεν ισχύει, γιατί αν το -1 είναι ρίζα του $K(x)$ βρίσκουμε $\alpha = \pm 2$. Οπότε για $\alpha = 2$ το $P(x)$ δεν έχει ρίζα το -1, διότι $P(-1) \neq 0$.

10. Το $P(x)$ είναι 3ου βαθμού.
Άρα πρέπει $(x^2 + 1)(\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta) = 3x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 3$.
Βρίσκουμε $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $\gamma = -2$, $\delta = -3$.

11. $P(\alpha - 1) = 13 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 + 2(\alpha - 1) + 5 = 13$. Βρίσκουμε $\alpha = \pm 3$.

13. Το $f(x)$ θα είναι 3ου βαθμού.
Έστω $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, $\alpha \neq 0$.
Θα ισχύει: $f(x) = (x^2 + 1)(3x - 1) + 2x + 5$.
Βρίσκουμε $\alpha = 3$, $\beta = -1$, $\gamma = 5$, $\delta = 4$.

14. Η διαίρεση των πολυωνύμων δίνει υπόλοιπο:
$\upsilon(x) = (2\kappa\lambda - \kappa^3)x - \lambda(\kappa^2 - \lambda) + 1$
Πρέπει $2\kappa\lambda - \kappa^3 = 0$ και $-\lambda(\kappa^2 - \lambda) + 1 = 0$.
Βρίσκουμε $\lambda = 1$ και $\kappa = \pm\sqrt{2}$.

15. Λύνοντας το σύστημα $\begin{cases} f\,(2) = 0 \\ f\,(1) = 8 \end{cases}$ βρίσκουμε α = - 9, β = 12.

16. Βρίσκουμε ότι οι ρίζες της $x^2 - x - 6 = 0$ είναι - 2, 3.
Πρέπει Ρ (- 2) = 0 και Ρ (3) = 0. Βρίσκουμε α = - 1, β = - 6.

17. Το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι υ = Ρ (- 2) = - 7.

18. Αφού το Ρ (x) έχει παράγοντα το x - 5, ισχύει Ρ (5) = 0.
Για να έχει το Ρ (2x - 3) παράγοντα το x - 4 πρέπει το πολυώνυμο για x = 4 να μηδενίζεται. Πράγματι, για x = 4 έχουμε Ρ (2·4 - 3) = Ρ (5) = 0.

19. **α)** $\pi\,(x) = x^2 + 5$, $\quad$ $\upsilon = 4$

β) $\pi\,(x) = 2x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 3x - 3$, $\quad$ $\upsilon = 6$

γ) $\pi\,(x) = 6x^2 + 6\alpha x - 2\alpha$, $\quad$ $\upsilon = \alpha^2$

δ) $\pi\,(x) = x^5 - \frac{7}{2}x^4 - \frac{7}{4}x^3 - \frac{7}{8}x^2 + \frac{9}{16}x + \frac{9}{32}$, $\quad$ $\upsilon = -\frac{119}{64}$

ε) $\pi\,(x) = x^4 - \frac{1}{\lambda}x^3 + \lambda x - 1$, $\quad$ $\upsilon = \frac{1}{\lambda} - 2$

20. Εργαζόμαστε με το σχήμα Horner

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -\kappa & \lambda-1 & 5 & 1 \\ \downarrow & 1 & 1-\kappa & \lambda-\kappa & \\ \hline 1 & 1-\kappa & \lambda-\kappa & \boxed{\lambda-\kappa+5} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1-\kappa & \lambda-\kappa & -2 \\ \downarrow & -2 & 2+2\kappa & \\ \hline 1 & -1-\kappa & \boxed{2+\lambda+\kappa} & \end{array}$$

Πρέπει $\begin{cases} \lambda-\kappa+5=0 \\ \lambda+\kappa+2=0 \end{cases}$ Βρίσκουμε $\kappa = \dfrac{3}{2}$, $\lambda = -\dfrac{7}{2}$

21.

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -3-\alpha & \beta+10 & 2 \\ \downarrow & 2 & 2 & -2\alpha-2 & \\ \hline 1 & 1 & -1-\alpha & \boxed{\beta-2\alpha+8} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1-\alpha & 2 \\ \downarrow & 2 & 6 & \\ \hline 1 & 3 & \boxed{5-\alpha} & \end{array}$$

Πρέπει $\begin{cases} \beta-2\alpha+8=0 \\ 5-\alpha=0 \end{cases}$ Βρίσκουμε $\alpha = 5$, $\beta = 2$

22. Είναι $P(2) = 10$ και $P(-3) = 5$

Το πολυώνυμο $P(x)$ γράφεται: $P(x) = (x - 2)(x + 3)\pi(x) + \alpha x + \beta$ (1)

Για $x = 2$ η (1) γίνεται: $P(2) = 2\alpha + \beta$

Για $x = -3$ η (1) γίνεται: $P(-3) = -3\alpha + \beta$

Βρίσκουμε $\alpha = 1, \beta = 8$

23. **α)** Πιθανές ακέραιες λύσεις οι $\pm 1, \pm 7$.

Εργαζόμαστε με σχήμα Horner και βρίσκουμε ακέραια λύση $x = 1$.

Ομοίως εργαζόμαστε και στα υπόλοιπα ερωτήματα.

24. Οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης (αν υπάρχουν) θα είναι οι ± 1.

Για $x = 1$ η εξίσωση γίνεται: $5 \cdot 1^{2\nu} + 9\kappa \cdot 1 - 1 = 0$

Βρίσκουμε ότι $\kappa \notin Z$, άρα το 1 δεν είναι λύση της εξίσωσης.

Ομοίως εργαζόμαστε και για $x = -1$.

25. **α)** Η ανίσωση, αν παραγοντοποιήσουμε το πρώτο μέλος, γράφεται:

$(x + 1)(x - 1)(x - 2) > 0$

Βρίσκουμε τα πρόσημα των παραγόντων $x + 1$, $x - 1$, $x - 2$ και με πίνακα καταλήγουμε ότι η ανίσωση αληθεύει όταν $-1 < x < 1$ ή $x > 2$.

β) Εργαζόμενοι αναλόγως βρίσκουμε $x \geq -1$.

γ) $-2 \leq x \leq \frac{1}{3}$

δ) $-\sqrt{2} \leq x \leq 1$ ή $\sqrt{2} \leq x \leq 2$

26. Το ανώτερο πλήθος ακέραιων ριζών της εξίσωσης είναι 2, δηλαδή οι διαιρέτες του 1.

Για $x = 1$ η εξίσωση γράφεται: $1 - α + β = 0$

Για $x = -1$ η εξίσωση γράφεται: $-1 + α + β - 2 = 0$

Βρίσκουμε $α = 2$, $β = 1$

27. **α)** Θέτουμε $x^3 = ω$ οπότε η εξίσωση γράφεται $ω^2 - 9ω + 8 = 0$.

Βρίσκουμε $ω = 1$ ή $ω = 8$, άρα $x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2$

Ομοίως εργαζόμαστε και στα υπόλοιπα ερωτήματα.

28. **α)** Πρέπει $x \neq \pm 1$. Μετά την απαλοιφή παρονομαστών η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την $x^2 + x - 2 = 0$. Βρίσκουμε $x = -2$ ή $x = 1$ (απορρίπτεται).

β) Πρέπει $x \neq 2$. Μετά την απαλοιφή του παρονομαστή η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την $x^3 - 3x^2 - 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 2x - 4) = 0$.

Βρίσκουμε $x = 1$ ή $\dfrac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$.

29. **α)** Πρέπει $x \neq 2$.

$$\frac{x^3 + 2x - 4}{x - 2} < 1 \Leftrightarrow \frac{x^3 + 2x - 4}{x - 2} - 1 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^3 + 2x - 4 - x + 2}{x - 2} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 + x - 2}{x - 2} < 0 \text{ άρα}$$

$(x - 2)(x^3 + x - 2) < 0$.

Βρίσκουμε $1 < x < 2$.

β) Πρέπει $x \neq \pm 1$, εργαζόμενοι αναλόγως με το (α) ερώτημα, βρίσκουμε ότι η ανίσωση γράφεται $(x^2 - 1)(x - 3)(x^2 + 2x + 2) \leq 0$.

x		-1		1		3	
$x^2 - 1$	+	‖	—	‖	+		+
$x - 3$	—	‖	—	‖	—	0	+
$x^2 + 2x + 2$	+	‖	+	‖	+		+
Γ	—	‖	+	‖	—	0	+

Βρίσκουμε $x < -1$ ή $1 < x \leq 3$.

30. **α)** Θέτουμε $(2ημx - 1)^2 = y$.

Βρίσκουμε $x = 2κπ + \frac{π}{2}$ ή $x = κπ$, $κ \in Z$.

β) Θέτουμε $ημx = y$ και η εξίσωση γίνεται

$2y^3 + 5y^2 + 5y + 2 = 0 \Leftrightarrow (y + 1)(2y^2 + 3y + 2) = 0 \Leftrightarrow y = -1$

άρα $ημx = -1 \Leftrightarrow x = 2κπ + \frac{3π}{2}$, $κ \in Z$.

γ) Θέτουμε $συνx = y$. Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$(y - 1)(y + 1)(2y^2 - 5y + 2) = 0 \Leftrightarrow y = 1$ ή $y = -1$ ή $y = \frac{1}{2}$

ή $y = 2$ (απορρίπτεται) κλπ.

31. α) Πρέπει $x \geq 3$. Υψώνουμε στο τετράγωνο και έχουμε:

$x - 3 = 25 \iff x = 28$, η οποία επαληθεύει την εξίσωση.

β) Πρέπει $-5 \leq x \leq 5$. Υψώνουμε στο τετράγωνο και προκύπτει:

$25 - x^2 = x^2 - 2x + 1 \iff x^2 - x - 12 = 0 \iff x = -3$ ή $x = 4$

Δεχόμαστε μόνο την $x = 4$ που επαληθεύει την εξίσωση.

γ) Πρέπει $x \geq 0$ και $x \geq -1$.

Εργαζόμενοι αναλόγως βρίσκουμε $x = \dfrac{9}{16}$.

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση βλέπουμε ότι δεν την επαληθεύει.

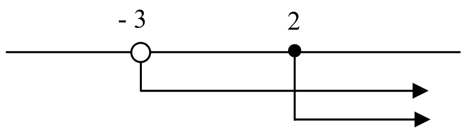
Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

δ) $x = \dfrac{5}{4}$ ή $x = \dfrac{1}{4}$

ε) αδύνατη.

32. α) Πρέπει $x \geq 2$ και $x \geq -\dfrac{1}{2}$ που συναληθεύουν για $x \geq 2$.

Υψώνουμε στο τετράγωνο και βρίσκουμε: $x - 2 < 2x + 1 \iff x > -3$.



Τελικά, όπως φαίνεται από το σχήμα, είναι $x \geq 2$.

β) $-\dfrac{1}{4} \leq x < 0$

Κεφάλαιο 3ο: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΠΡΟΟΔΟΙ

Ερωτήσεις του τύπου “Σωστό-Λάθος”

1. * Ο νιοστός όρος $α_ν$ μιας αριθμητικής προόδου με διαφορά ω είναι $α_ν = α_1 + (ν - 1)\,ω$. **Σ** **Λ**

2. * Το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου είναι $S_ν = \dfrac{(α_1 + α_ν)\cdot ν}{2}$. **Σ** **Λ**

3. * Το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου είναι $S_ν = \dfrac{\left[2α_1 + (ν-1)ω\right]ν}{2}$. **Σ** **Λ**

4. * Αν α, β, γ, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου τότε $β - α = γ - β$. **Σ** **Λ**

5. * Ισχύει ότι $1 + 2 + ... + ν = \dfrac{ν\,(ν+1)}{2}$. **Σ** **Λ**

6. * Η ακολουθία $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...$ είναι αριθμητική πρόοδος. **Σ** **Λ**

7. * Στην αριθμητική πρόοδο 2, 7, 12, 17, ... η διαφορά ω είναι 5. **Σ** **Λ**

8. * Η ακολουθία $(α_ν)$ με $α_{ν+1} = α_ν + 3$ είναι αριθμητική πρόοδος. **Σ** **Λ**

9. * Σε μία αριθμητική πρόοδο με $α_1 = 5$ και $ω = -3$ είναι $S_ν = \dfrac{(13 - 3ν)ν}{2}$. **Σ** **Λ**

10. * Η αριθμητική πρόοδος 3, 7, 11, ... έχει άθροισμα ν πρώτων όρων $S_ν = 4^ν-1$. **Σ** **Λ**

11. * Η αριθμητική πρόοδος - 5, - 8, - 11, ... έχει νιοστό όρο $α_ν = -3ν-2$. **Σ** **Λ**

12. * Σε μια αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο $α_1 = -3$ και διαφορά ω = 5 ο νιοστός όρος είναι $α_ν = 3·5^{ν-1}$. **Σ** **Λ**

13. * Οι αριθμοί 7, 11, 15 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. **Σ** **Λ**

14. * Οι αριθμοί 7, 14, 28 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. **Σ** **Λ**

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. * Η ακολουθία είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο

Α. Q **Β.** Z* **Γ.** N **Δ.** N* **Ε.** R

2. * Η γραφική παράσταση μιας ακολουθίας είναι

Α. Μια ευθεία γραμμή

Β. Μια παραβολή

Γ. Μια υπερβολή

Δ. Μεμονωμένα σημεία του επιπέδου με τετμημένες φυσικούς αριθμούς

Ε. Μια τυχαία γραμμή στο επίπεδο

3. * Ο γενικός όρος της ακολουθίας $\alpha_\nu = |5\nu - 1| - |5\nu + 1|$ είναι

Α. $\alpha_\nu = 5\nu + 2$ **Β.** $\alpha_\nu = 10\nu$ **Γ.** $\alpha_\nu = 10\nu - 2$

Δ. $\alpha_\nu = -2$ **Ε.** $\alpha_\nu = 2$

4. * Ο γενικός όρος της ακολουθίας $\alpha_\nu = (-1)^\nu + (-1)^{\nu+1}$ είναι

Α. $\alpha_\nu = 0$ **Β.** $\alpha_\nu = 1$ **Γ.** $\alpha_\nu = 2$

Δ. $\alpha_\nu = -1$ **Ε.** $\alpha_\nu = -2$

5. * Ο $3^{ος}$ όρος της ακολουθίας $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 3$, $\alpha_1 = 1$ είναι

Α. - 6 **Β.** - 2 **Γ.** 1 **Δ.** 7 **Ε.** 2

6. * Η γραφική παράσταση της ακολουθίας $\alpha_\nu = (-1)^\nu + (-1)^{\nu+1} + 2$ είναι σημεία με τετμημένες θετικούς ακεραίους της ευθείας

Α. $y = 0$ **Β.** $y = 2$ **Γ.** $y = -2$ **Δ.** $y = 3$ **Ε.** $y = 4$

7. * Από τις παρακάτω ακολουθίες αριθμητική πρόοδος είναι η

Α. 3, 6, 8, 10, 11, ...

Β. 2, 4, 8, 16, 32, ...

Γ. -3, 1, 5, 9, 13 , ...

Δ. -3, 0, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, ...

Ε. $\frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9}, \frac{2}{11}, \ldots$

8. * Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_1 = 3$ και $\alpha_5 = 23$. Τότε η διαφορά ω είναι ίση με

Α. 3 **Β.** 4 **Γ.** 5 **Δ.** 1 **Ε.** 20

9. * Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_{10} = 2$ και $\omega = 3$. Τότε α_1 είναι ίσο με

Α. 5 **Β.** 1 **Γ.** - 1 **Δ.** 6 **Ε.** - 25

10. * Σε μια αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο $\alpha_1 = 3$ και διαφορά $\omega = 4$ έχουμε $\alpha_\nu = 35$. Τότε το πλήθος ν των όρων της είναι

Α. 7 **Β.** 32 **Γ.** 31 **Δ.** 9 **Ε.** 8

11. * Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_8 = 40$ και $\alpha_{20} = -20$. Τότε ο $14^{ος}$ όρος της είναι ίσος με

Α. 5 **Β.** 12 **Γ.** 10 **Δ.** 9 **Ε.** 20

12. * Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_1 = 11$ και $\omega = -3$. Τότε οι **θετικοί** της όροι είναι

Α. 2 **Β.** 3 **Γ.** 4 **Δ.** 5 **Ε.** όλοι οι όροι της

13. * Ο $10^{ος}$ όρος της αριθμητικής προόδου : $10, 7, 4, \cdots$ είναι

Α. - 14 **Β.** - 20 **Γ.** - 17 **Δ.** - 30 **Ε.** 0

14. * Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_1 = 7$ και $\omega = 2$. Τότε **δεν** είναι όρος της ο

Α. 15 **Β.** 11 **Γ.** 25 **Δ.** 21 **Ε.** 12

15. * Η ακολουθία με γενικό όρο $\alpha_\nu = 3\nu + 2$ είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω ίση με

Α. 5 **Β.** 2 **Γ.** - 1 **Δ.** 3 **Ε.** 10

16. * Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_1 = 8$ και $\omega = 3$. Τότε ο νιοστός της όρος είναι ίσος με

Α. $\alpha_\nu = 8\nu + 3$ **Β.** $\alpha_\nu = 3\nu + 8$ **Γ.** $\alpha_\nu = 3\nu + 5$

Δ. $\alpha_\nu = 5\nu + 3$ **Ε.** $\alpha_\nu = \nu + 11$

17. ** Ένας μαθητής ύψους 1,7 m στέκεται μπροστά σε μια σκάλα, κάθε σκαλοπάτι της οποίας έχει ύψος 18 cm.

α) Το πρώτο σκαλοπάτι της σκάλας, που βρίσκεται σε μεγαλύτερο ύψος από το μαθητή, είναι το

Α. όγδοο **Β.** δέκατο **Γ.** ενδέκατο **Δ.** δωδέκατο **Ε.** εικοστό

β) Δεν υπάρχει σκαλοπάτι που να βρίσκεται σε ύψος από το έδαφος

Α. 36 cm **Β.** 54 cm **Γ.** 72 cm **Δ.** 1,44 m **Ε.** 1,56 m

18. ** Αν σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_4 = x$ και $\alpha_6 = y$, τότε η διαφορά ω είναι ίση με

Α. $\frac{x+y}{2}$ **Β.** $\frac{x-y}{2}$ **Γ.** $y-\frac{x}{2}$ **Δ.** $\frac{y-x}{2}$ **Ε.** $\frac{y}{2}-x$

19. * Η διαφορά της αριθμητικής προόδου : $\alpha+\beta$, α, $\alpha-\beta$, $\cdots$ είναι

Α. α **Β.** β **Γ.** 2β **Δ.** $-\alpha$ **Ε.** $-\beta$

20. * Από τις παρακάτω τριάδες **δεν** αποτελείται από διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου η

Α. 5, 20, 35 **Β.** - 5, 0, 5 **Γ.** 45, 20, - 5

Δ. 5, -10, -25 **Ε.** - 5, 20, 35

21. * Αν οι αριθμοί 3k, k + 4, k - 1 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε ο k είναι ίσος με

Α. 4 **Β.** 2 **Γ.** 5 **Δ.** 4,5 **Ε.** 1,5

22. * Αν τρεις ακέραιοι αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, έχουν άθροισμα 21 και γινόμενο 280, τότε αυτοί είναι

Α. 2, 10, 14 **Β.** 5, 7, 9 **Γ.** 4, 7, 10

Δ. 1, 7, 13 **Ε.** - 4, 7, - 10

23. * Αν οι αριθμοί x, y, z είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε ισχύει

Α. $y = x + z$ **Β.** $z = x + y$ **Γ.** $z = x + 2y$

Δ. $z - y = y - x$ **Ε.** $z - x = 2y$

24. * Αν οι γ, $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε

Α. $\gamma = \beta$ **Β.** $\gamma = \beta - \alpha$ **Γ.** $\gamma = \alpha + 2\beta$ **Δ.** $\gamma = \alpha + 3\beta$ **Ε.** $\gamma = \alpha + 4\beta$

25. * Αν οι αριθμοί $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε

Α. $\frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\gamma}{2}$ **Β.** $\frac{1}{\beta} = \frac{2}{\alpha+\gamma}$ **Γ.** $\frac{2}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}$

Δ. $\frac{\beta}{2} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}$ **Ε.** $\frac{1}{\beta} = \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\gamma}$

26. * Σε μια αριθμητική πρόοδο τα αθροίσματα $S_6 = 93$ και $S_5 = 90$. Τότε ισχύει

Α. $\omega = 3$ **Β.** $\alpha_1 = 3$ **Γ.** $\alpha_5 = 3$ **Δ.** $\alpha_6 = 3$ **Ε.** $S_4 = 3$

27. * Τα πολλαπλάσια του 3 μεταξύ του 5 και του 35 είναι

Α. 3 **Β.** 5 **Γ.** 8 **Δ.** 10 **Ε.** 30

28. * Μια ακολουθία $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_\nu$ είναι αριθμητική πρόοδος αν και μόνο αν

Α. η διαφορά δυο οποιωνδήποτε όρων της είναι σταθερός πραγματικός αριθμός

Β. η διαφορά μεταξύ πρώτου και τελευταίου όρου της είναι σταθερός αριθμός

Γ. οι διαφορές των διαδοχικών όρων της είναι ίσοι πραγματικοί αριθμοί

Δ. οι διαφορές των διαδοχικών όρων της είναι ίσοι θετικοί πραγματικοί αριθμοί

Ε. το άθροισμα των όρων της είναι σταθερός πραγματικός αριθμός.

29. * Σε κάθε αριθμητική πρόοδο με διαφορά ω, το άθροισμα δυο όρων της που ισαπέχουν από τα άκρα της είναι

Α. Πολλαπλάσιο της διαφοράς ω.

Β. Παίρνει τιμές που εξαρτώνται από την τάξη των όρων αυτών.

Γ. Ίσο με το πλήθος ν.

Δ. Ίσο με το άθροισμα των άκρων όρων της προόδου.

Ε. Ίσο με τον αριθμητικό μέσο της.

30. * Από τις επόμενες τετράδες **δεν** αποτελείται από διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου η

Α. 2, 5, 8, 11 **Β.** - 13, - 9, - 5, - 1 **Γ.** 8, 18, 38, 58

Δ. - 6, - 1, 4, 9 **Ε.** - 4, - 2, 0, 2

31. * Αν οι $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε ποια από τις παρακάτω απαντήσεις **δεν** είναι πάντα σωστή;

Α. $\beta + \gamma = \alpha + \delta$ **Β.** $\alpha + \gamma = 2\beta$ **Γ.** $\beta + \delta = 2\gamma$

Δ. $\delta - \gamma = \beta - \alpha$ **Ε.** $\alpha + \beta + \gamma = \delta$

32. * Ο 15 είναι ο αριθμητικός μέσος των αριθμών

Α. 5 και 20 **Β.** -5 και -25 **Γ.** -9 και -21 **Δ.** 9 και 21 **Ε.** 9 και -21

33. * Οι διάφοροι του μηδενός πραγματικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Ποια από τις παρακάτω τριάδες **δεν** αποτελείται από διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου;

Α. γ, β, α **Β.** $-\alpha, -\beta, -\gamma$ **Γ.** $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$

Δ. $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ **Ε.** $-\frac{\gamma}{3}, -\frac{\beta}{3}, -\frac{\alpha}{3}$

34. * Αν σε μια αριθμητική πρόοδο έχουμε $\alpha_1 = 5$ και $\omega = 5$, τότε το άθροισμα των 4 πρώτων όρων της είναι

Α. 18 **Β.** 43 **Γ.** 50 **Δ.** 20 **Ε.** 89

35. * Σε κάθε αριθμητική πρόοδο η διαφορά ω είναι

Α. θετικός ρητός **Β.** σταθερός ακέραιος **Γ.** $\neq 0$

Δ. ίσος με ν **Ε.** σταθερός πραγματικός

36. * Αν οι αριθμοί x, y, z είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε

Α. $2x = y + z$ **Β.** $2z = x + y$ **Γ.** $2y = x + z$

Δ. $y^2 = x^2 + z^2$ **Ε.** $2y = x \cdot z$

37. * Σε μια αριθμητική πρόοδο το άθροισμα $S_ν$ των **ν** πρώτων όρων της είναι

Α. $(α_ν - α_1)\frac{ν}{2}$ **Β.** $(α_ν + α_1)\frac{ω}{2}$ **Γ.** $(α_ν + α_1)\frac{ν}{2}$

Δ. $(α_ν - α_1)\frac{ω}{2}$ **Ε.** $(α_ν + νω)\frac{ν}{2}$

38. * Σε μια αριθμητική πρόοδο το άθροισμα $S_ν$ των **ν** πρώτων όρων της είναι

Α. $[2α_1 + (ν - 1)]\frac{ν}{2}$ **Β.** $[2α_1 + νω]\frac{ν}{2}$ **Γ.** $[α_1 + (ν - 1)ω]\frac{ν}{2}$

Δ. $[2α_1 + (ν - 1)ω]\frac{ν}{2}$ **Ε.** $(α_ν + νω)\frac{ν}{2}$

Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. * Να γράψετε τους όρους που λείπουν στις παρακάτω αριθμητικές προόδους

α) 5, 8 , … , 14 , 17 , … , … , 26 .

β) 7, … , … , 25 .

γ) k , 2k + 3 , … , 4k + 9 , … .

δ) x , … , 5x + 2 , 7x + 3 , … , … .

2. * Να συμπληρώσετε τον πίνακα με τους όρους που λείπουν στις παρακάτω ακολουθίες.

Ακολουθία με αναδρομικό τύπο	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
α) $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 2\nu$	…	…	3	…	…
β) $\alpha_{\nu+1} = 2\alpha_\nu + 1$	…	…	…	- 13	…

3. * Να γράψετε τους όρους που λείπουν στις παρακάτω αριθμητικές προόδους

α)	11	15	…	23	…
β)	…	…	20	29	38
γ)	4	…	18	…	32
δ)	…	33	…	65	…

4. ** Να γράψετε τους όρους που λείπουν στις παρακάτω αριθμητικές προόδους

α)	10	…	70			
β)	10	…	…	70		
γ)	10	…	…	…	70	
δ)	10	…	…	…	…	70

5. ** Να γράψετε τους όρους που λείπουν έτσι ώστε κάθε γραμμή να είναι αριθμητική πρόοδος

α)	x + y	x - y	…	…	…
β)	…	x - y	…	x + y	…
γ)	…	x - 3y	…	…	x + 3y
δ)	x + 3y	…	…	…	x - 3y

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. * Συνδέστε κατάλληλα κάθε ακολουθία της στήλης Α του πίνακα (Ι) με τον αντίστοιχο όρο της, που υπάρχει στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $\alpha_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\nu}$	**Α.** $\alpha_2 = \frac{1}{\nu},\ \alpha_3 = -\frac{1}{\nu}$
	Β. $\alpha_2 = 3,\ \alpha_3 = 5$
2. $\alpha_\nu = (-1)^\nu + 1$	
	Γ. $\alpha_2 = 8,\ \alpha_3 = 27$
	Δ. $\alpha_2 = -2,\ \alpha_3 = 1$
3. $\alpha_\nu = \nu^3$	
	Ε. $\alpha_2 = 2,\ \alpha_3 = 0$
4. $\alpha_\nu = 3\nu - 8$	**ΣΤ.** $\alpha_2 = \frac{2}{\nu},\ \alpha_3 = \frac{3}{\nu}$

Πίνακας (ΙΙ)

1	2	3	4

2. * Συνδέστε κατάλληλα κάθε ακολουθία της στήλης Α του πίνακα (Ι) με τον 5^{o} της όρο, που υπάρχει στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $\frac{1}{14}, \frac{1}{11}, \frac{1}{8}, \cdots$	**Α.** $\frac{1}{2}$
	Β. -2
	Γ. $-\frac{1}{2}$
2. $-8, 4, -2, \cdots$	**Δ.** $-\frac{1}{4}$
3. $10, 7, 4, \cdots$	**Ε.** -5
4. $27, -9, 3, \cdots$	**ΣΤ.** $\frac{1}{3}$

Πίνακας (ΙΙ)

1	2	3	4

3. * Συνδέστε κατάλληλα κάθε αριθμητική πρόοδο της στήλης Α του πίνακα (Ι) με το νιοστό όρο της, που υπάρχει στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

Στήλη Α	**Στήλη Β**
	Α. $\alpha_\nu = 4\nu - 14$
1. $\alpha_1 = 2 \quad , \quad \omega = 3$	
	Β. $\alpha_\nu = 5\nu - 10$
2. $\alpha_1 = 24 \quad , \quad \omega = -3$	**Γ.** $\alpha_\nu = 3\nu - 1$
	Δ. $\alpha_\nu = -3\nu + 27$
3. $\alpha_1 = -10 \quad , \quad \omega = 4$	
	Ε. $\alpha_\nu = 6\nu + 1$

Πίνακας (ΙΙ)

1	**2**	**3**

4. * Να αντιστοιχίσετε σε κάθε αριθμητική πρόοδο της στήλης Α του πίνακα (Ι) το άθροισμα $S_ν$ των ν πρώτων όρων της, που υπάρχει στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $α_1 = 2,\ ω = 3$	**Α.** $S_ν = \frac{-3ν+51}{2} \cdot ν$
2. $α_1 = 24,\ ω = -3$	**Β.** $S_ν = (ν+2) \cdot ν$
3. $α_1 = -10,\ ω = 4$	**Γ.** $S_ν = \frac{3ν+1}{2} \cdot ν$
	Δ. $S_ν = 2 \cdot (ν-6) \cdot ν$
	Ε. $S_ν = (2ν-1) \cdot ν$

Πίνακας (ΙΙ)

1	2	3

5. ** Συνδέστε κατάλληλα κάθε αριθμητική πρόοδο της στήλης Α του πίνακα (Ι) με τη διαφορά της, που υπάρχει στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $\alpha_4 = \alpha_1 + 3$	**Α.** 1
	Β. - 1
2. $\alpha_7 = \alpha_1 - 6$	**Γ.** 2
	Δ. - 2
3. $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 3$	**Ε.** 3
4. $\alpha_{\nu+1} = \alpha_{\nu-1} - 4$	**ΣΤ.** - 3

Πίνακας (ΙΙ)

1	2	3	4

6. ** Να αντιστοιχίσετε σε κάθε τριάδα διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου της στήλης Α του πίνακα (Ι), την τιμή που πρέπει να πάρει το x της στήλης Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

Στήλη Α	Στήλη Β
	Α. x = 5
1. 2 , x + 1 , 12	
	Β. x = 16
2. 3 + x , 15 , 22	**Γ.** x = 2
	Δ. x = 6
3. 14 , 9 + x , 20 + x	
	Ε. x = 0

Πίνακας (ΙΙ)

1	2	3

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. * Να βρείτε τους τέσσερις πρώτους όρους των παρακάτω ακολουθιών:

α) $\alpha_\nu = 4\nu + 3$

β) $\alpha_\nu = 2 + \left(-1\right)^\nu$

γ) $\alpha_\nu = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{\nu \cdot \left(\nu + 1\right)}$

δ) $\alpha_1 = 0$, $\alpha_{\nu+1} = \frac{2}{3\alpha_\nu + 1}$

2. ** Να βρείτε τον αναδρομικό τύπο των ακολουθιών

α) $\alpha_\nu = 2\nu - 3$

β) $\beta_\nu = 5 \cdot 3^\nu$

γ) $\gamma_\nu = 1 + 2^\nu$

3. ** Να βρείτε τον γενικό τύπο των ακολουθιών

α) $\alpha_{\nu+1} = 1 + \alpha_\nu$, $\alpha_1 = -1$

β) $\beta_{\nu+1} = 3 \cdot \beta_\nu$, $\beta_1 = 15$

4. * Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_1 = 6$ και $\alpha_{12} = 94$. Να βρείτε

α) τη διαφορά ω και

β) τον 10^{o} όρο της προόδου.

5. ** Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_1 = 3$ και $\omega = 7$.

α) Να βρείτε το πλήθος ν των πρώτων όρων της προόδου που δίνουν άθροισμα ίσο με 679.

β) Ποιος θα είναι ο τελευταίος όρος α_ν σ' αυτή την περίπτωση;

6. ** Σε μια αριθμητική πρόοδο το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της είναι $S_{20} = 610$ και το άθροισμα των 12 πρώτων όρων της $S_{12} = 222$. Να βρείτε τη διαφορά ω και τον $1^{ο}$ όρο της .

7. ** Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο στην οποία
   α) το άθροισμα του $1^{ου}$ και του $5^{ου}$ όρου είναι -2, ενώ το άθροισμα του $2^{ου}$ και του $6^{ου}$ είναι 2
   β) το άθροισμα του $2^{ου}$ και του $4^{ου}$ όρου είναι 7, ενώ το γινόμενο των ίδιων όρων είναι 10.

8. ** Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο της οποίας το άθροισμα των 3 πρώτων της όρων είναι ίσο με -3 και άθροισμα των 5 πρώτων όρων ίσο με 10.

9. ** Να βρείτε το άθροισμα των 4 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου με $\alpha_6 = 8, \alpha_4 = 4$.

10. ** Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο αν ο $2^{ος}$ και ο $7^{ος}$ όρος έχουν γινόμενο 100 και οι μεταξύ τους όροι έχουν άθροισμα 50

11. ** Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_9 = 15$ και $S_{12} = 165$.
    α) Να βρείτε τον $5^{ο}$ όρο της προόδου και
    β) το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της.

12. ** α) Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο αν $\alpha_3 = 11$ και $\alpha_6 = 23$
    β) Πόσοι πρώτοι όροι της έχουν άθροισμα που **δεν** υπερβαίνει το 210;

13. ** Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο στην οποία ο $4^{ος}$ και ο $8^{ος}$ όρος της έχουν άθροισμα 18, ενώ το άθροισμα των κύβων των όρων αυτών είναι 3.402.

14. * Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \Re$ οι αριθμοί $(\alpha+\beta)^2$, $\alpha^2+\beta^2$ και $(\alpha-\beta)^2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

15. * Αν οι αριθμοί $\frac{2}{\beta+\gamma}, \frac{2}{\gamma+\alpha}, \frac{2}{\alpha+\beta}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να δείξετε ότι το ίδιο ισχύει και για τους $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$.

16. ** α) Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου δείξτε ότι: $\alpha-\beta=\beta-\gamma$.

β) Αν οι αριθμοί $\frac{\beta+\gamma-\alpha}{\alpha}, \frac{\gamma+\alpha-\beta}{\beta}, \frac{\alpha+\beta-\gamma}{\gamma}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$, δείξτε ότι οι $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ είναι επίσης διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

17. ** Να βρείτε τρεις διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου, οι οποίοι έχουν *άθροισμα* 33 και *γινόμενο* 440.

18. ** Να βρείτε τέσσερις διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου, οι οποίοι έχουν *άθροισμα* 16 και *γινόμενο άκρων* όρων 7.

19. ** Να βρείτε πόσα πολλαπλάσια του 7 περιέχονται μεταξύ του 15 και του 300.

20. ** Να βρείτε το πλήθος και το άθροισμα

α) των διψήφιων περιττών αριθμών

β) των διψήφιων αρτίων αριθμών

γ) των διψήφιων φυσικών αριθμών

δ) των διψήφιων πολλαπλασίων του 4.

21. ** α) Ποιο είναι το άθροισμα των 7 πρώτων όρων της προόδου: 3, 5, 7, 9, ... ;

β) Πόσους διαδοχικούς πρώτους όρους της προόδου αυτής πρέπει να προσθέσουμε, για να πάρουμε άθροισμα 99;

22. ** Μεταξύ των αριθμών 4 και 34 να παρεμβάλετε άλλους αριθμούς, ώστε να δημιουργηθεί μια αριθμητική πρόοδος με 11 όρους.

23. ** Πόσους αριθμούς πρέπει να παρεμβάλουμε μεταξύ του 5 και του 50 ώστε ο τελευταίος από τους αριθμούς αυτούς να είναι 3πλάσιος από τον δεύτερο και όλοι οι αριθμοί να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου;

24. ** Να βρείτε τις γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου, αν γνωρίζετε ότι είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

25. ** Σε μια ευθεία θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία Α,Β,Γ,Δ,Ε ώστε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΕ να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Αν ΑΓ = 16 cm και ΓΕ = 24 cm να βρείτε τα μήκη των ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΕ .

26. ** Να βρείτε το άθροισμα των ν πρώτων όρων της ακολουθίας:
$1 , -3 , 5 , -7 , 9 , -11 , \ldots$

27. ** Στις προόδους (α_ν) :17, **<u>21</u>**, 25, ... και (β_ν) :16 , **<u>21</u>** , 26,... εμφανίζονται κοινοί όροι (όπως ο **<u>21</u>**).
α) Να βρείτε τον επόμενο κοινό τους όρο.
β) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων κοινών όρων τους.

28. ** Να βρείτε τα αθροίσματα:
α) $2+5+8+11+\cdots+(2+3\nu)$ και β) $3+5+7+\cdots+(3+2\nu)$.

29. ** Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x+2)+(x+5)+(x+8)+\cdots+(x+29)=165$.

β) $1+7+13+\cdots+x=280$ με $x>0$

30. ** Ο νιοστός όρος μιας ακολουθίας είναι $\alpha_\nu = 3\nu+2$.

α) Να βρείτε τον επόμενο όρο $\alpha_{\nu+1}$

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι αριθμητική πρόοδος

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 30 πρώτων όρων της

δ) Να βρείτε την τάξη του όρου της που είναι ίσος με 62

(Μπορούν να γίνουν και ανάλογα προβλήματα για $\alpha_\nu = 4\nu-2$ ή $\alpha_\nu = -3\nu+13$ ή $\alpha_\nu = -4\nu+19$ κ.λ.π.)

31. *** Μιας ακολουθίας το άθροισμα των ν πρώτων όρων της είναι $S_\nu = 3\nu^2+\nu$.

α) Να βρείτε το άθροισμα των (ν-1) πρώτων όρων της

β) Να βρείτε τον νιοστό της όρο

γ) Να βρείτε τον όρο $\alpha_{\nu+1}$

δ) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι αριθμητική πρόοδος

ε) Να βρείτε την τάξη του όρου της που είναι ίσος με 100

(Μπορούν να γίνουν και ανάλογα προβλήματα για $S_\nu = 2\nu^2+3\nu$ ή $S_\nu = 4\nu^2-3\nu$ ή $S_\nu = -\nu^2+2\nu$ κ.λ.π.)

32. *** Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο της οποίας το άθροισμα των ν πρώτων όρων, για κάθε φυσικό αριθμό ν, είναι $S_\nu = \dfrac{\nu\cdot(\nu+1)}{2}$.

33. ** Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο της οποίας το άθροισμα των ν πρώτων όρων, για κάθε φυσικό αριθμό ν, είναι $S_\nu = 2\nu^2$.

34. ** Ένας αγρότης, για μια γεώτρηση στο κτήμα του, συμφώνησε τα εξής με τον ιδιοκτήτη του γεωτρύπανου: το σκάψιμο του πρώτου μέτρου θα στοιχίσει 2.000 δρχ. και για κάθε επί πλέον μέτρο το κόστος σκαψίματος θα είναι κατά 500 δρχ. μεγαλύτερο από το κόστος σκαψίματος του προηγουμένου μέτρου.

Συμπληρώστε τον πίνακα:

I. i)

Βάθος	1ο m	2ο m	4ο m	…
Κόστος μέτρου	2.000 δρχ.	2.500 δρχ.	…	7.500 δρχ.
Κόστος γεώτρησης	2.000 δρχ.	4.500 δρχ.	…	…

ii) Το βάθος στο οποίο το κόστος του μέτρου υπερβαίνει τις 5.000 δρχ. είναι

Α. 3 m **Β.** 5 m **Γ.** 6 m **Δ.** 7 m **Ε.** 8 m

iii) Το βάθος στο οποίο το κόστος της γεώτρησης δεν υπερβαίνει τις 20.000 δρχ. είναι

Α. 12 m **Β.** 10 m **Γ.** 8 m **Δ.** 7 m **Ε.** 6 m

iv) Με 30.000 δρχ. η γεώτρηση θα φθάσει σε βάθος

Α. 4 m **Β.** 5 m **Γ.** 6 m **Δ.** 8 m **Ε.** 10 m

II. i) Πόσο κοστίζει το $25^{ο}$ μέτρο της γεώτρησης αυτής;

ii) Πόσο κοστίζει συνολικά η γεώτρηση αν φθάσει τα 60 m βάθος;

iii) Ένας δεύτερος αγρότης κάνει μια γεώτρηση του ίδιου βάθους και πληρώνει 18.000 δρχ. για κάθε μέτρο της. Πόσα μέτρα είναι το βάθος των γεωτρήσεων αν ξέρουμε ότι ο πρώτος έδωσε λιγότερα χρήματα;

35. ** Ένα κερί καίγεται με σταθερό ρυθμό. Στο τέλος της $1^{ης}$ ώρας είχε ύψος 36 cm, στο τέλος της $2^{ης}$ 33 cm, στο τέλος της $3^{ης}$ 30 cm κ.λπ.

I. i) Οι τιμές του ύψους του κεριού στο τέλος κάθε ώρας αποτελούν αριθμητική πρόοδο με διαφορά $\omega = 3$ **Σ** **Λ**

ii) Οι τιμές του ύψους του κεριού στο τέλος κάθε ώρας αποτελούν αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο $\alpha_1 = 36$ **Σ** **Λ**

iii) Το ύψος του κεριού στο τέλος κάθε ώρας θα είναι πολλαπλάσιο του 3 **Σ** **Λ**

iv) Στο τέλος της $5^{ης}$ ώρας το ύψος του κεριού θα είναι μικρότερο από 20 μέτρα **Σ** **Λ**

v) Μετά από 15 ώρες το κερί δεν θα έχει λειώσει τελείως **Σ** **Λ**

II. i) Ποια από τις παρακάτω τριάδες είναι ύψη του κεριού στο τέλος τριών διαδοχικών ωρών:

Α. 21 , 23 , 25 **Β.** 18 , 20, 22 **Γ.** 24 , 25 , 26
Δ. 15 , 21, 27 **Ε.** 15 , 18 , 21

ii) Στο τέλος της $6^{ης}$ ώρας το ύψος του κεριού θα είναι

Α. 25 cm **Β.** 20 cm **Γ.** 18 cm **Δ.** 21 cm **Ε.** 24 cm

iii) Το ύψος του κεριού θα γίνει μικρότερο από 18 cm στο τέλος της

Α. $4^{ης}$ ώρας **Β.** $6^{ης}$ ώρας **Γ.** $8^{ης}$ ώρας **Δ.** $10^{ης}$ ώρας **Ε.** $12^{ης}$ ώρας

iv) Το κερί **δεν** θα έχει λειώσει τελείως μετά από

Α. 25 ώρες **Β.** 20 ώρες **Γ.** 18 ώρες **Δ.** 15 ώρες **Ε.** 12 ώρες

v) Το ύψος που θα έπρεπε να έχει το κερί, για να λειώσει τελείως μετά από 24 ώρες είναι

Α. 59 cm **Β.** 66 cm **Γ.** 68 cm **Δ.** 69 cm **Ε.** 72 cm

III. α) Πόσο θα είναι το ύψος του στο τέλος της $8^{ης}$ ώρας;

β) Στο τέλος ποιας ώρας θα έχει ύψος 9 cm;

γ) Πόσο ήταν το ύψος την στιγμή που το ανάψαμε;

δ) Πόσες ώρες θα μείνει αναμμένο;

36. ** Σ’ έναν ουρανοξύστη 17 ορόφων, τα γραφεία του ιδίου ορόφου έχουν το ίδιο ενοίκιο. Κάθε γραφείο του πρώτου ορόφου ενοικιάζεται 55.000 δρχ. το μήνα. Κάθε γραφείο ενός ορόφου ενοικιάζεται 3.500 δρχ. το μήνα ακριβότερα από ένα γραφείο του προηγουμένου ορόφου.

α) Ποιο είναι το μηνιαίο ενοίκιο ενός γραφείου του πέμπτου ορόφου;

β) Πόσο ακριβότερο είναι ένα γραφείο του $15^{ου}$ ορόφου από ένα του $7^{ου}$ ορόφου;

γ) Σε ποιους ορόφους το ενοίκιο ξεπερνά τις 100.000 δρχ. το μήνα;

δ) Αν το πλήθος των γραφείων ενός ορόφου είναι μικρότερο κατά 2 από το πλήθος των γραφείων του αμέσως προηγουμένου ορόφου και ο $17^{ος}$ όροφος έχει 12 γραφεία, πόσα γραφεία έχει ο πρώτος όροφος;

37. ** Α. Οι μαθητές ενός σχολείου θέλησαν να γραφτούν στο βιβλίο Γκίνες κάνοντας ρεκόρ στο σχηματισμό της υψηλότερης ανθρώπινης πυραμίδας που θα ισορροπούσε για ένα λεπτό. Μπήκαν λοιπόν σε σειρές ως εξής: στην κορυφή ένα άτομο, στην επόμενη σειρά δύο, στην αμέσως πιο κάτω σειρά τρεις κ.λ.π. Έτσι κατάφεραν συνολικά 45 μαθητές να κάνουν το ρεκόρ.

α) Πόσες σειρές είχε η πυραμίδα που σχημάτισαν;

β) Πόσοι τουλάχιστον μαθητές θα χρειαστούν ώστε να σπάσει το ρεκόρ αυτό, αν σχηματίσουν με παρόμοιο τρόπο μια νέα πυραμίδα;

Β. Ένα μήνα μετά οι μαθητές ενός γειτονικού σχολείου σχημάτισαν με όμοιο τρόπο μια πυραμίδα υψηλότερη κατά 3 σειρές και έσπασαν το ρεκόρ.

α) Πόσοι συνολικά ήταν μαθητές αυτοί;

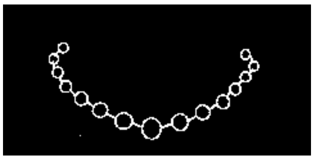
β) Αν οι μαθητές που παίρνουν μέρος στο σχηματισμό της πυραμίδας δεν ξεπερνούν τους 210, πόσες σειρές μπορούν να σχηματίσουν;

38. ** Μια ομάδα 324 στρατιωτών παρατάσσεται σε τριγωνικό σχήμα ώστε: στην πρώτη σειρά μπαίνει ένας στην δεύτερη τρεις , στην τρίτη πέντε κ.λ.π.

α) Πόσοι θα είναι στην $12^{η}$ σειρά;

β) Πόσες σειρές σχηματίστηκαν συνολικά;

39. ** Ένα κολιέ αξίας 650.000 δρχ. αποτελείται από 33 διαμάντια Το μεσαίο διαμάντι είναι και το ακριβότερο. Τα υπόλοιπα διαμάντια είναι τοποθετημένα κατά σειρά αξίας, ώστε κάθε διαμάντι μέχρι το μεσαίο να αξίζει 1.000 δρχ. λιγότερο από το επόμενό του και στη συνέχεια, από το μεσαίο και πέρα, κάθε διαμάντι να αξίζει 1.500 δρχ. λιγότερο από το προηγούμενό του.



Α. α) Πόσες δρχ. φθηνότερο από το μεσαίο διαμάντι είναι το πρώτο;

β) Πόσες δρχ. φθηνότερο από το μεσαίο διαμάντι είναι το τελευταίο;

Β. Πόσες δρχ. είναι η αξία του μεσαίου διαμαντιού;

40. ** Α. Σε μια αμφιθεατρική αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς σχηματίζει αριθμητική πρόοδο. Η 1η σειρά έχει 16 καθίσματα και η 7η 28 καθίσματα.

α) Πόσα καθίσματα έχει η 10η σειρά;

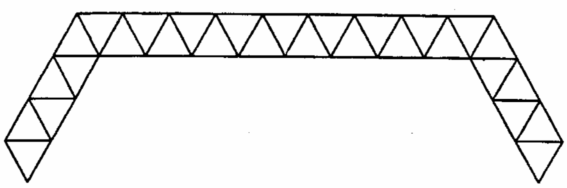
β) Πόσα καθίσματα υπάρχουν από την 4η έως την και την 10η σειρά;

Β. Αν στην 1η σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στη 2η υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην 3η 12 κ.λ.π.

α) από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα;

β) Πόσοι θα είναι οι θεατές;

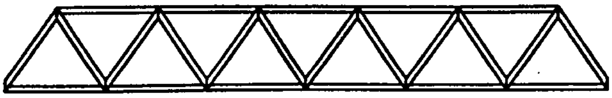
41. *** Στις σύγχρονες βιομηχανικές εγκαταστάσεις χρησιμοποιούνται για την στήριξη των οροφών ειδικές αψίδες (όπως αυτή στο παρακάτω σχήμα 1),



(Σχ. 1)

που τοποθετούνται επάνω σε τσιμεντένιες κολώνες.

Οι αψίδες αυτές σχηματίζονται από δοκάρια (όπως στο παρακάτω σχήμα 2),



(Σχ. 2)

διαφορετικού μήκους που αποτελούνται από ίσες μεταλλικές ράβδους.

Τα δοκάρια ονομάζονται με τον αριθμό που δείχνει το πλήθος των ράβδων της μεγαλύτερης πλευράς τους (π.χ. στο σχήμα 2 έχουμε δοκάρι νούμερο **6**).

Α. α) Πόσες ράβδους έχει ένα δοκάρι νούμερο **4**;

β) Πόσες ράβδους διαφορά έχουν δυο δοκάρια με διαδοχικά νούμερα;

Β. α) Να βρείτε έναν τύπο που να συνδέει τον νούμερο **k** ενός δοκαριού, με το πλήθος **ρ** των ράβδων του.

β) Σε πόση απόσταση πρέπει να μπουν οι τσιμεντοκολώνες που θα στηρίξουν την αψίδα του σχήματος 1, αν κάθε ράβδος έχει μήκος 0,5 m;

42. ** Κατά τη διάρκεια έργων συντήρησης του οδοστρώματος ενός τμήματος της εθνικής οδού, είχαν τοποθετηθεί ειδικοί φωτεινοί σηματοδότες (σχήματος βέλους) που εμπόδιζαν την κυκλοφορία σε εκείνο το τμήμα του δρόμου. Οι σηματοδότες αυτοί ήταν τοποθετημένοι ανά 10 m. Μόλις τελείωσαν τα έργα, ένας εργάτης που βρισκόταν στον πρώτο σηματοδότη, πήρε εντολή να μεταφέρει όλους τους σηματοδότες δίπλα στον τελευταίο. Όμως, λόγω του μεγάλου βάρους του σηματοδότη, ο εργάτης μπορούσε να μεταφέρει μόνο ένα κάθε φορά. Όταν τελείωσε την μεταφορά, είχε καλύψει συνολικά 1,44 km.

α) Πόσες φορές έκανε τη διαδρομή από τον πρώτο έως τον τελευταίο σηματοδότη;

β) Πόσες φορές έκανε τη διαδρομή από τον δεύτερο έως τον τελευταίο σηματοδότη;

γ) Πόσοι ήταν οι σηματοδότες;

43. ** Ένας αθλητής μετά την αποθεραπεία του από ένα ατύχημα, άρχισε την Δευτέρα 19 Φεβρουαρίου 1996 νέες προπονήσεις. Ανάμεσα στις άλλες ασκήσεις έπρεπε να κάνει και κάμψεις (push ups) καθημερινά (ακόμα και τα Σάββατα και τις Κυριακές), σύμφωνα με το παρακάτω πρόγραμμα:

Ημέρα	Δευτέρα	Τρίτη	Τετάρτη	Πέμπτη	...
Αριθμός Κάμψεων	9	13	17	21	...

μέχρι να φθάσει τον αριθμό των 101 κάμψεων. Έπειτα θα συνέχιζε με 100 κάμψεις κάθε ημέρα εκτός Κυριακής.

α) Πόσες κάμψεις θα έκανε την Τετάρτη της επόμενης εβδομάδας;

β) Μετά από πόσες μέρες έφθασε τις 101 κάμψεις;

γ) Ποια ήταν η ημερομηνία της πρώτης Κυριακής που σταμάτησε τις κάμψεις;

44. Ένα παιδί παίζοντας με κύβους του 1 cm^3 έφτιαξε μια τετραγωνική πυραμίδα με 3 πατώματα. Το 1ο πάτωμα (η βάση) έχει επιφάνεια 25 cm^2 , το 2ο (το μεσαίο) έχει επιφάνεια 9 cm^2 και το 3ο (η κορυφή) αποτελείται από ένα μόνο κύβο. Αν το παιδί έφτιαχνε μια παρόμοια πυραμίδα με 10 πατώματα,

α) πόσους κύβους θα περιείχε η βάση της;

β) πόσους κύβους θα είχε χρησιμοποιήσει;

γ) Αν είχε στη διάθεσή του 220 κύβους, πόσα πατώματα θα είχε η πυραμίδα του;

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Κεφάλαιο 3ο: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΠΡΟΟΔΟΙ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου "Σωστό-Λάθος"

1.	Σ
2.	Σ
3.	Σ
4.	Σ
5.	Σ

6.	Λ
7.	Σ
8.	Σ
9.	Σ

10.	Λ
11.	Σ
12.	Λ
13.	Σ
14.	Λ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1.	Δ
2.	Δ
3.	Δ
4.	Α
5.	Δ
6.	Β
7.	Γ
8.	Γ
9.	Ε
10.	Δ
11.	Γ
12.	Γ
13.	Γ

14.	Ε
15.	Δ
16.	Γ
17α.	Β
17β.	Ε
18.	Δ
19.	Ε
20.	Ε
21.	Δ
22.	Γ
23.	Δ
24.	Δ
25.	Γ

26.	Γ
27.	Δ
28.	Γ
29.	Δ
30.	Γ
31.	Ε
32.	Δ
33.	Δ
34.	Γ
35.	Ε
36.	Γ
37.	Γ
38.	Δ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. **α)** 11 • 20 • 23 **β)** 13 • 19 **γ)** 3k+6 • 5k + 12 **δ)** 3x + 1 • 9x + 4 • 11x + 5

2. **α)** - 3 • - 1 • 3 • 9 • 15 **β)** - 25 • - 4 • - 7 • - 13 • - 19

3. **α)** 19 • 27 **β)** 2 • 11 **γ)** 11 • 25 **δ)** 17 • 49 • 81

4. **α)** 40 **β)** 30 • 50 **γ)** 25 • 40 • 55 **δ)** 22 • 34 • 46 • 58

5. **α)** x - 3y • x - 5y • x - 7y **β)** x - 2y • x • x + 2y

γ) x - 5y • x - y • x + y **δ)** $x + \frac{3}{2}y$ • x • $x - \frac{3}{2}y$

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

1	Α
2	Ε
3	Γ
4	Δ

2.

1	Α
2	Γ
3	Β
4	ΣΤ

3.

1	Γ
2	Δ
3	Α

4.

1	Γ
2	Α
3	Δ

5.

1	Α
2	Β
3	Ε
4	Δ

6.

1	Δ
2	Α
3	Β

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. **α)** $\alpha_1 = 7$ $\quad \alpha_2 = 11$ $\quad \alpha_3 = 15$ $\quad \alpha_4 = 19$

   β) $\alpha_1 = 1$ $\quad \alpha_2 = 3$ $\quad \alpha_3 = 1$ $\quad \alpha_4 = 3$

   γ) $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ $\quad \alpha_2 = \frac{2}{3}$ $\quad \alpha_3 = \frac{3}{4}$ $\quad \alpha_4 = \frac{4}{5}$

   δ) $\alpha_1 = 0$ $\quad \alpha_2 = 2$ $\quad \alpha_3 = \frac{2}{7}$ $\quad \alpha_4 = \frac{14}{13}$

2. **α)** $\alpha_\nu = 2_\nu - 3$ και $\alpha_{\nu+1} = 2(\nu + 1) - 3 = 2\nu - 1$ οπότε $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 2\nu - 1 - 2\nu + 3 = 2$
   άρα $\alpha_{\nu+1} = 2 + \alpha_\nu$ & $\alpha_1 = -1$

   β) $\beta_{\nu+1} = 3\beta_\nu$ & $\beta_1 = 15$

   γ) $\gamma_{\nu+1} = 2^\nu + \gamma_\nu$ & $\gamma_1 = 3$

3. **α)**
$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = 1 + \alpha_1 \\ \alpha_3 = 1 + \alpha_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_\nu = 1 + \alpha_{\nu-1} \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} \alpha_\nu = \nu - 1 - 1 \Leftrightarrow \alpha_\nu = \nu - 2$$

   β) $\beta_\nu = 15 \cdot 3^{\nu-1}$

4. **α)** $\omega = 8$ $\qquad$ **β)** $\alpha_{10} = 78$

5. **α)** $\nu = 14$ $\qquad$ **β)** $\alpha_{14} = 94$

6. $\omega = 3$ & $\alpha_1 = 2$

7. α) Πρέπει $\left.\begin{matrix} \alpha_1 + \alpha_2 = -2 \\ \text{και} \quad \alpha_2 + \alpha_6 = 2 \end{matrix}\right\}$ οπότε $\omega = 2$ και $\alpha_1 = -5$

β) Πρέπει $\left.\begin{matrix} \alpha_2 + \alpha_4 = 7 \\ \text{και} \quad \alpha_2 \cdot \alpha_4 = 10 \end{matrix}\right\}$ οπότε $\omega = \frac{3}{2}$ και $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ ή $\omega = -\frac{3}{2}$ και $\alpha_1 = \frac{13}{2}$

8. Πρέπει $S_3 = -3$ και $S_5 = 10$, οπότε $\omega = 3$ και $\alpha_1 = -4$

9. $\alpha_6 = 8$ και $\alpha_4 = 4$, οπότε βρίσκουμε το α_1 και το ω, οπότε $S_4 = 4$

10. Πρέπει $\alpha_2 \cdot \alpha_7 = 100$ και $\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = 50$, οπότε $\omega = 3$ και $\alpha_1 = 2$ ή $\omega = -3$ και $\alpha_1 = 23$

11. **α)** $\alpha_5 = 13$ **β)** $S_{20} = 315$

12. **α)** $\omega = 4$ & $\alpha_1 = 3$ **β)** 10

13. Πρέπει $\alpha_4 + \alpha_8 = 18$ και $\alpha_4^3 + \alpha_8^3 = 3402$, οπότε $\omega = 3$ και $\alpha_1 = -6$ ή $\omega = -3$ και $\alpha_1 = 24$

14. Πρέπει να ισχύει $2(\alpha^2 + \beta^2) = (\alpha + \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2$

15. Πρέπει να ισχύει $2\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2$, αν ισχύει $\frac{4}{\alpha+\gamma} = \frac{2}{\beta+\gamma} + \frac{2}{\alpha+\beta}$

16. **α)** $\alpha - \beta = \beta - \gamma = -\omega$ **β)** Πρέπει να ισχύει $\frac{2}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}$

17. Αν $x - \omega$, x, $x + \omega$ οι αριθμοί, τότε αυτοί είναι 2, 11, 20

18. Αν $x - 3\omega$, $x - \omega$, $x + \omega$, $x + 3\omega$ οι αριθμοί, τότε αυτοί είναι 1, 3, 5, 7 ή 7, 5, 3, 1

19. Αν η αριθμητική πρόοδος είναι με $\alpha_1 = 21$, $\omega = 7$ και $\alpha_\nu = 294$, τότε $\nu = 40$

20. **α)** 45, 2475 **β)** 45, 2430 **γ)** 90, 4905 **δ)** 22, 1188

21. **α)** $S_7 = 63$ **β)** 9

22. Αν ω η διαφορά της προόδου με $\alpha_1 = 4$ και $\alpha_\nu = 34$, τότε $\omega = 3$, οπότε η πρόοδος είναι 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34

23. Αν παρεμβάλουμε ν όρους, τότε 50 = 5 + (ν + 1) ω $\Leftrightarrow$ $\omega = \dfrac{45}{\nu+1}$ είναι η διαφορά της προόδου, άρα ο προτελευταίος όρος είναι $50 - \dfrac{45}{\nu+1}$ και ο τρίτος όρος είναι $5 + 2\,\dfrac{45}{\nu+1}$, οπότε $50 - \dfrac{45}{\nu+1} = 3\left(5 + 2\,\dfrac{45}{\nu+1}\right)$, άρα ν = 8

24. 30°, 60°, 90°

25. Αν ΑΒ = x - 3ω, ΒΓ = x - ω, ΓΔ = x + ω και ΔΕ = x + 3ω, τότε ΑΒ = 7 cm, ΒΓ = 9 cm, ΓΔ = 11 cm, ΔΕ = 13 cm

26. Αν *ν άρτιος* το άθροισμα είναι ίσο με - ν και αν *ν περιττός* το άθροισμα είναι ίσο με ν.

Υπόδειξη: Να βρείτε χωριστά το άθροισμα των θετικών όρων και των αρνητικών στις περιπτώσεις i) ν άρτιος και ii) ν περιττός

i) ν = 2k. Στην περίπτωση αυτή οι θετικοί όροι είναι k το πλήθος, το ίδιο και οι αρνητικοί.

ii) ν = 2k + 1. Εδώ οι θετικοί όροι είναι k + 1, ενώ οι αρνητικοί k

27. **α)** 41 **β)** $S_{20} = 4220$

28. **α)** $\dfrac{(4+3\nu)\cdot(\nu+1)}{2}$ **β)** (3 + ν) · (ν + 1)

Υπόδειξη: **α)** Βρείτε πρώτα την τάξη μ του όρου 2 + 3ν χρησιμοποιώντας τον τύπο $\alpha_\mu = \alpha_1 + (\mu - 1)\,\omega$ για $\alpha_\mu = 2 + 3\nu$.

β) Εργαστείτε με όμοιο τρόπο.

29. **α)** x = 1 **β)** x = 55

***Υπόδειξη:* α)** Αν μ το πλήθος των προσθετέων τότε το Α΄ μέλος $= \mu x + (2 + 5 + \ldots + 29)$.
Το πλήθος μ βρίσκεται από την τάξη του όρου 29 της προόδου 2, 5, …, 29 της παρένθεσης.

β) Να βρείτε πρώτα την τάξη του όρου x.

30. **α)** $\alpha_{\nu+1} = 3\nu + 5$ **β)** $\omega = \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu$ **γ)** 1455 **δ)** 20

31. **α)** $S_{\nu-1} = 3\nu^2 - 5\nu + 2$
β) $\alpha_\nu = S_\nu - S_{\nu-1} = 6\nu - 2$
γ) $\alpha_{\nu+1} = 6\nu + 4$
δ) $\omega = \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu$
ε) $\nu = 17$

32. $S_\nu = \dfrac{\nu(\nu+1)}{2}$ και $S_{\nu-1} = \dfrac{(\nu-1)\nu}{2}$ οπότε $\alpha_\nu = S_\nu - S_{\nu-1} = \nu$, άρα $\alpha_{\nu+1} = \nu + 1$, οπότε $\omega = \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 1$ και $\alpha_1 = 1$

33. Αν εργαστούμε όμοια με την άσκηση (32) βρίσκουμε: $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 4$

34. **Ι.** **i)** *Βάθος:* 12ο m • *Κόστος 4ου m:* 3.500 δρχ.
Κόστος γεώτρησης: 4ου m = 11.000 δρχ. • 12ου m = 57.000 δρχ.
ii) Ε **iii)** Ε **iv)** Δ
ΙΙ. **i)** 14.000 δρχ. **ii)** 1.005.000 δρχ. **iii)** λιγότερο από 65 m

35. **Ι.** **i)** Λ **ii)** Σ **iii)** Σ **iv)** Λ **v)** Λ

II. i) Ε **ii)** Δ **iii)** Γ **iv)** Ε **v)** Ε
III. α) 15 cm **β)** 10 **γ)** 39 cm **δ)** 13 ώρες

36. α) 69.000 δρχ. **β)** 28.000 δρχ. **γ)** από τον 14ο όροφο και άνω **δ)** 44 γραφεία

37. Α. α) 9 **β)** 55
Β. α) 78 **β)** 20

38. α) 23 **β)** 18

39. Α. α) 16.000 δρχ. **β)** 24.000 δρχ.
Β. 30.000 δρχ.

40. Α. α) 34 **β)** 196
Β. α) 11η σειρά **β)** 55

41. Α. α) 15 **β)** 4
Β. α) $\rho = 4k - 1$ **β)** 5,5 m
Υπόδειξη: Στηριχθείτε στο σχήμα.

42. α) 1 **β)** 2 **γ)** 13

43. α) 45 **β)** 24 **γ)** 17 Μαρτίου 1996
Υπόδειξη: Το έτος είναι δίσεκτο.

44. α) 19 **β)** 190 **γ)** 11

Γεωμετρικες Προοδοι

Ερωτήσεις του τύπου "Σωστό-Λάθος"

1.	* Ο νιοστός όρος α_ν μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο λ είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$.	**Σ**	**Λ**
2.	* Το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου με $\lambda \neq 1$ είναι $S_\nu = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$.	**Σ**	**Λ**
3.	* Το άθροισμα των απείρων όρων μιας γεωμετρικής προόδου με $\lvert\lambda\rvert < 1$ είναι $S = \frac{\alpha_1}{\lambda - 1}$.	**Σ**	**Λ**
4.	* Αν α, β, γ, διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου τότε $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta}$.	**Σ**	**Λ**
5.	* Η ακολουθία 2, 5, 8, ... είναι γεωμετρική πρόοδος.	**Σ**	**Λ**
6.	* Στη γεωμετρική πρόοδο 100, 50, 25, ... ο λόγος λ είναι $\frac{1}{2}$.	**Σ**	**Λ**
7.	* Στη γεωμετρική πρόοδο 18, -9, $\frac{9}{2}$, $-\frac{9}{4}$ ... ο λόγος λ είναι $\frac{1}{2}$.	**Σ**	**Λ**
8.	* Η ακολουθία (α_ν) με $\alpha_{\nu+1} = 3\alpha_\nu$ είναι γεωμετρική πρόοδος.	**Σ**	**Λ**
9.	* Η γεωμετρική πρόοδος 4, 8, 16, 32, ... έχει $S_\nu = 4\,(2^\nu - 1)$.	**Σ**	**Λ**
10.	* Η γεωμετρική πρόοδος 100, 50, 25, ... έχει άθροισμα απείρων όρων S = 200.	**Σ**	**Λ**
11.	* Η γεωμετρική πρόοδος 3, 6, 12, ... έχει άθροισμα απείρων όρων S = 6.	**Σ**	**Λ**
12.	* Η γεωμετρική πρόοδος - 2, 4, - 8, 16, ... έχει άθροισμα απείρων όρων S = 2.	**Σ**	**Λ**

13. * Σε μία γεωμετρική πρόοδο με πρώτο όρο $α_1 = 20$ και λόγο $λ = \frac{1}{2}$ είναι $S_ν = 40$. **Σ** **Λ**

14. * Η γεωμετρική πρόοδος 2, 6, 18, ... έχει νιοστό όρο $α_ν = 2 \cdot 3^{ν-1}$. **Σ** **Λ**

15. * Σε μια γεωμετρική πρόοδο με πρώτο όρο $α_1 = 4$ και λόγο $λ = 2$ ο νιοστός όρος $α_ν = 2ν + 2$. **Σ** **Λ**

16. * Οι αριθμοί 7, 14, 21 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. **Σ** **Λ**

17. * Οι αριθμοί 3, 6, 12 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. **Σ** **Λ**

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. * Από τις παρακάτω ακολουθίες είναι γεωμετρική πρόοδος η

Α. 10, 20, 30, … **Β.** 5, 15, 25, … **Γ.** 3, 6, 9, …
Δ. 4, 20, 100, … **Ε.** - 5, 10, 25, …

2. * Αν σε μία γεωμετρική πρόοδο $\alpha_1 = 4$ και $\lambda = 3$, αυτή είναι

Α. 4, 7, 10, 13, … **Β.** 4, 4·3, 4·6, … **Γ.** 4, 12, 36, …
Δ. 3, 12, 48, … **Ε.** $4, 4^3, 4^9, \ldots$

3. * Αν 7, - 21, 63, … μια γεωμετρική πρόοδος, τότε ο λ είναι

Α. 3 **Β.** - 14 **Γ.** 14 **Δ.** -3 **Ε.** 4

4. * Ο 4^{ος} όρος της γεωμετρικής προόδου $-\frac{3}{4}$, 1, ...είναι

Α. $\frac{9}{16}$ **Β.** $-\frac{9}{16}$ **Γ.** $\frac{16}{9}$
Δ. $-\frac{16}{9}$ **Ε.** $\frac{3}{4}$

5. * Αν σε μία γεωμετρική πρόοδο είναι $\alpha_1 = 5$, $\lambda = 2$, τότε ο α_5 είναι

Α. - 25 **Β.** $\sqrt{5}$ **Γ.** 10
Δ. 80 **Ε.** 320

6. * Αν σε μία γεωμετρική πρόοδο είναι $\alpha_1 = 3$ και $\alpha_4 = 375$, τότε ο λ είναι

Α. 378 **Β.** 372 **Γ.** 10 **Δ.** 5 **Ε.** 3

7. * Αν σε μία γεωμετρική πρόοδο είναι $\lambda = 2$ και $\alpha_6 = 448$, τότε ο α_1 είναι

Α. - 50 **Β.** 14 **Γ.** 600 **Δ.** - 100 **Ε.** 1200

8. * Αν σε μία γεωμετρική πρόοδο είναι $α_1 = 2$, $λ = 3$ και $α_ν = 162$, τότε η τάξη του όρου $α_ν$ είναι

Α. 2 **Β.** 4 **Γ.** 3
Δ. 1 **Ε.** 5

9. * Αν σε μια γεωμετρική πρόοδο είναι $α_4 = x$ και $α_6 = y$ (όπου x, y ομόσημοι), τότε έχουμε

Α. $λ = \frac{x \cdot y}{2}$ **Β.** $λ = \frac{x}{y}$ **Γ.** $λ = \frac{y^2}{x^2}$ **Δ.** $λ^2 = \frac{y}{x}$ **Ε.** $λ = \frac{x^2 \cdot y^2}{2}$

10. * Ο λόγος της γεωμετρικής προόδου α·β, α,... είναι

Α. $\frac{1}{α}$ **Β.** $\frac{1}{β}$ **Γ.** $\frac{β}{α}$ **Δ.** $\frac{α}{β}$ **Ε.** $α^2 \frac{β}{2}$

11. * Αν σε μια γεωμετρική πρόοδο $α_5 = 48$ και $α_7 = 192$, τότε το $α_3$ είναι

Α. - 12 **Β.** 12 **Γ.** 144 **Δ.** 36 **Ε.** 24

12. * Αν τρεις θετικοί ακέραιοι αριθμοί αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου και έχουν άθροισμα 65, τότε αυτοί είναι

Α. $5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}$ **Β.** 7, 21, 36 **Γ.** - 24, - 12, - 6
Δ. 5, 15, 45 **Ε.** $\sqrt{11}$, $\sqrt{21}$, $\sqrt{43}$

13. * Ο αριθμός 6 είναι γεωμετρικός μέσος των αριθμών

Α. 4 και 8 **Β.** - 2 και - 3 **Γ.** 3 και 12 **Δ.** 2 και 10 **Ε.** 5 και 7

14. * Αν οι αριθμοί x - 1, x, x + 2 αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου, ο x ισούται με

Α. - 2 **Β.** $\frac{2}{3}$ **Γ.** 4 **Δ.** 0 **Ε.** 2

15. * Αν οι x - 1, x + 1, x + 5 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε

Α. x = 1 **Β.** x = -1 **Γ.** x = 2
Δ. x = 3 **Ε.** $x \neq 0$

16. ** Αν οι θετικοί αριθμοί $\frac{\alpha}{\beta}$, γ, α·β είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε

Α. $\gamma = \beta^2$ **Β.** $\gamma = |\beta|$ **Γ.** γ = 2α **Δ.** $\gamma = |\alpha|$ **Ε.** γ = αβ

17. * Αν οι αριθμοί x, y, z είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε

Α. $y = \frac{z}{x}$ **Β.** $x = \frac{z}{y}$ **Γ.** $\frac{x}{y} = \frac{y}{z}$ **Δ.** $\frac{x}{y} = \frac{z}{y}$ **Ε.** $y = \frac{x \cdot z}{2}$

18. * Αν οι γ, $\alpha\cdot\beta^3$, α·β είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε

Α. $\gamma = \alpha\cdot\beta^4$ **Β.** $\gamma = \alpha\cdot\beta^{-2}$ **Γ.** $\gamma = \beta^5$ **Δ.** $\gamma = \alpha\cdot\beta^5$ **Ε.** $\gamma = \beta^{-2}$

19. * Αν οι α, β, γ, δ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε από τις παρακάτω απαντήσεις **δεν** είναι πάντα σωστή η

Α. β·γ = α·δ **Β.** $\alpha\cdot\gamma = \beta^2$ **Γ.** $\beta\cdot\delta = \gamma^2$ **Δ.** $\frac{\delta}{\gamma} = \frac{\beta}{\alpha}$ **Ε.** α·β·γ = δ

20. * Αν σε μία γεωμετρική πρόοδο είναι $\alpha_1 = 3$, λ = 2, τότε ο νιοστός όρος της είναι

Α. $\alpha_\nu = 3\cdot2^{\nu-1}$ **Β.** $\alpha_\nu = 2\cdot3^{\nu-1}$ **Γ.** $\alpha_\nu = - 2^\nu - 3$
Δ. $\alpha_\nu = 3^\nu + 2$ **Ε.** $\alpha_\nu = 3\ 2^\nu$

21. * Αν $\alpha_1 = 3$ και $\alpha_{\nu+1} = 4 \cdot \alpha_\nu$, τότε ο νιοστός όρος της γεωμετρικής προόδου είναι

Α. $\alpha_\nu = -12^\nu$ **Β.** $\alpha_\nu = 4\,\alpha_\nu - 1$ **Γ.** $\alpha_\nu = 4 \cdot 3^\nu$ **Δ.** $\alpha_\nu = 3 \cdot 4^{\nu-1}$ **Ε.** $\alpha_\nu = 2 \cdot 7^\nu$

22.* Αν μία γεωμετρική πρόοδος έχει $\alpha_\nu = 2 \cdot 5^{\nu-1}$, τότε αυτή έχει

Α. $\alpha_1 = 10, \lambda = \frac{1}{2}$ **Β.** $\alpha_1 = 5, \lambda = 2$ **Γ.** $\alpha_1 = 2, \lambda = 5$

Δ. $\alpha_1 = 3, \lambda = 2$ **Ε.** $\alpha_1 = \frac{1}{2}, \lambda = 5$

23. * Στη γεωμετρική πρόοδο - 1, 2, - 4, ... το άθροισμα των 6 πρώτων όρων της είναι

Α. - 21 **Β.** - 16 **Γ.** 8 **Δ.** 21 **Ε.** - 48

24. * Αν $\alpha_1 = 8$ και $\lambda = 3$, τότε το S_4 είναι

Α. 720 **Β.** - 360 **Γ.** 320

Δ. 180 **Ε.** 240

25. * Αν $\alpha_1 = 7$ και $S_4 = 280$, τότε το λ είναι

Α. 5 **Β.** - 2 **Γ.** $\frac{1}{7}$

Δ. 7 **Ε.** 3

26. * Σε μία γεωμετρική πρόοδο αν είναι $\alpha_1 = 4$, $\lambda = 4$, $S_\nu = 5460$, τότε ο ν είναι

Α. $\sqrt{21}$ **Β.** - 8 **Γ.** 4 **Δ.** 6 **Ε.** $\frac{13}{2}$

27. * Αν σε μία γεωμετρική πρόοδο $\alpha_1 = 5$ και $\lambda = 2$, τότε το S_ν είναι

Α. $S_\nu = 5 \cdot (2^\nu - 1)$ **Β.** $S_\nu = 5 \cdot 2^\nu$ **Γ.** $S_\nu = 5 \cdot 2^{\nu+1}$

Δ. $S_\nu = 5 \cdot (2^\nu + 3)$ **Ε.** $S_\nu = 5 \cdot 2^{\nu-1}$

28. * Για να είναι μία ακολουθία $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$ γεωμετρική πρόοδος πρέπει

Α. η διαφορά δύο διαδοχικών όρων να είναι σταθερή

Β. το πηλίκο δύο οποιονδήποτε όρων να είναι σταθερό $\neq 0$

Γ. το πηλίκο των διαδοχικών όρων της να είναι σταθερό $\neq 0$

Δ. η απόλυτη τιμή της διαφοράς δύο διαδοχικών όρων της να είναι σταθερή

Ε. το γινόμενο των διαδοχικών όρων της να είναι σταθερό

29. * Σε κάθε γεωμετρική πρόοδο ο λόγος λ είναι

Α. θετικός **Β.** $\neq 1$ **Γ.** ακέραιος

Δ. ίσος με ν **Ε.** σταθερός πραγματικός $\neq 0$

30. * Σε κάθε γεωμετρική πρόοδο ισχύει

Α. $\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_3$ **Β.** $\alpha_4 = \alpha_1 \cdot 4\lambda$ **Γ.** $\alpha_4 = \alpha_3 + \lambda$

Δ. $\alpha_4 = \alpha_3 \cdot \lambda$ **Ε.** $\alpha_4 = \alpha_1 \cdot \alpha_3$

31. * Σε κάθε γεωμετρική πρόοδο ισχύει

Α. $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^\nu$ **Β.** $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$ **Γ.** $\alpha_\nu = \alpha_1{}^\nu \cdot \lambda$

Δ. $\alpha_\nu = \alpha_1{}^{\nu-1} \cdot \lambda$ **Ε.** $\alpha_\nu = (\alpha_1 \cdot \lambda)^\nu$

32. * Σε μια γεωμετρική πρόοδο με $\lambda \neq 1$ το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της είναι

Α. $\alpha_1 \cdot \dfrac{\lambda^{\nu-1} - 1}{\lambda - 1}$ **Β.** $\alpha_1 \cdot \dfrac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$ **Γ.** $\alpha_\nu \cdot \dfrac{\alpha_1 - 1}{\lambda - 1}$

Δ. $\alpha_1 \cdot \dfrac{\alpha_\nu - 1}{\lambda - 1}$ **Ε.** $\dfrac{\alpha_1 \cdot \alpha_\nu}{\lambda - 1}$

33. * Ο τύπος του αθροίσματος των ν όρων $S_ν = α_1 \cdot \dfrac{λ^ν - 1}{λ - 1}$ μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο λ χρησιμοποιείται

Α. σε οποιαδήποτε γεωμετρική πρόοδο

Β. σε γεωμετρική πρόοδο με $λ \neq 1$

Γ. μόνο σε γεωμετρική πρόοδο με $α_1 > 0$ και $|λ| < 1$

Δ. μόνο σε γεωμετρική πρόοδο με $α_1 > 0$ και $|λ| > 1$

Ε. μόνο σε γεωμετρική πρόοδο με $α_1 < 0$ και $|λ| < 1$

34. * Σε μια γεωμετρική πρόοδο έχουμε $S_4 = α$ και $S_5 = β$. Τότε ισχύει

Α. $λ = \dfrac{β}{α}$ **Β.** $α_5 = \dfrac{β}{α}$ **Γ.** $α_1 = \dfrac{β - α}{λ^4}$

Δ. $α_5 = \dfrac{β - α}{λ}$ **Ε.** $α_5 = β - α$

Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. * Να συμπληρώσετε τους όρους που λείπουν στις παρακάτω γεωμετρικές προόδους:

α)	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	...	...	...
β)	...	...	6	- 2	...
γ)	2	...	8	...	...
δ)	...	$-\frac{1}{2}$	...	$-\frac{1}{8}$	...

2. ** Να γράψετε τους όρους που λείπουν στις παρακάτω γεωμετρικές προόδους:

α)	2	...	128		
β)	2	...	...	128	
γ)	- 2	...	...	...	- 128

3. ** Να γράψετε τους όρους που λείπουν ώστε οι παρακάτω γραμμές να είναι γεωμετρικές πρόοδοι (όπου x και y θετικοί):

α)	$\frac{x}{y}$	$x \cdot y$	...	...	...
β)	...	$x \cdot y$	...	$\frac{x}{y}$	...
γ)	...	$\frac{x}{y^2}$	...	...	$x \cdot y$
δ)	$\frac{x}{y^3}$	...	...	...	$x \cdot y^3$

4. ** α) Στην πρόοδο $α_1$, $α_2$, ..., $α_{47}$ ο όρος που ισαπέχει με τον $α_{13}$ από τα άκρα είναι ο .... ενώ αυτός που ισαπέχει με τον $α_{32}$ είναι ο ....

β) Στην πρόοδο $α_1$, $α_2$, ..., $α_{1999}$ ο μεσαίος όρος είναι ο ....

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. * Σε κάθε γεωμετρική πρόοδο της στήλης Α του πίνακα (Ι), να αντιστοιχίσετε τους νιοστούς όρους, που υπάρχουν στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

Στήλη Α	Στήλη Β
1. 3, 12, 48, ... **2.** - 10, -5, $-\frac{5}{2}$, ... **3.** 24, 8, $\frac{8}{3}$, ...	**Α.** $\alpha_\nu = 24\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\nu-1}$ **Β.** $\alpha_\nu = 3\cdot 4^{\nu-1}$ **Γ.** $\alpha_\nu = 24\cdot 3^{\nu-1}$ **Δ.** $\alpha_\nu = -10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1}$ **Ε.** $\alpha_\nu = 3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{\nu-1}$

Πίνακας (ΙΙ)

1	**2**	**3**

2. * Σε κάθε γεωμετρική πρόοδο της στήλης Α του πίνακα (Ι), να αντιστοιχίσετε το άθροισμα των ν πρώτων όρων, που υπάρχουν στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. 5, 15, 45, ...	**Α.** $S_\nu = -27\cdot\left[\left(\frac{1}{3}\right)^\nu - 1\right]$
	Β. $S_\nu = 18\cdot(3^\nu - 1)$
2. 18, 6, 2, ...	**Γ.** $S_\nu = \frac{5}{2}\cdot(3^\nu - 1)$
3. $-20, -4, -\frac{4}{5}, \ldots$	**Δ.** $S_\nu = 25\cdot\left[\left(\frac{1}{5}\right)^\nu - 1\right]$
	Ε. $S_\nu = 5\cdot\left[\left(\frac{1}{5}\right)^\nu - 1\right]$

Πίνακας (ΙΙ)

1	**2**	**3**

3. * Σε κάθε γεωμετρική πρόοδο με $|\lambda| < 1$ της στήλης Α του πίνακα (Ι), να αντιστοιχίσετε το άθροισμα S των άπειρων όρων της, που γράφεται στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $27, 9, 3, \ldots$	**Α.** $S = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$
	Β. $S = \dfrac{3}{4}$
2. $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{18}, \ldots$	**Γ.** $S = \dfrac{81}{2}$
	Δ. $S = \dfrac{27}{4}$
3. $\sqrt{2}, \sqrt{\dfrac{2}{3}}, \sqrt{\dfrac{2}{9}}, \ldots$	**Ε.** $S = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-1}$

Πίνακας (ΙΙ)

1	2	3

4. * Σε κάθε τριάδα όρων γεωμετρικής προόδου της στήλης Α του πίνακα (Ι), να αντιστοιχίσετε την ακέραιη θετική τιμή του x, της στήλης Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. $x + 2,\ 4x,\ 7x + 2$ **2.** $x,\ x - 3,\ x + 3$	**Α.** $x = -8$ **Β.** $x = \frac{5}{2}$ **Γ.** $x = 2$ **Δ.** $x = 1$

Πίνακας (ΙΙ)

1	**2**

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. * Να σχηματίσετε τις γεωμετρικές προόδους με:

α) $\alpha_1 = 5$ και $\lambda = 3$

β) $\alpha_1 = \frac{2}{3}$ και $\lambda = \frac{1}{4}$

γ) $\alpha_1 = -20$ και $\lambda = \frac{1}{2}$

2. * Ποιον αριθμό πρέπει να προσθέσουμε στους αριθμούς 2, 16, 58 για να γίνουν τρεις διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου;

3. * α) Αν $\alpha_1 = 2$ και $\lambda = \frac{1}{3}$ να βρείτε τον α_6

β) Αν $\alpha_6 = 448$ και $\lambda = 2$ να βρείτε τον α_1

γ) Αν $\alpha_1 = 9$ και $\alpha_5 = 144$ να βρείτε το λ

δ) Αν $\alpha_1 = 2$ και $\lambda = 3$ και $\alpha_\nu = 162$ να βρείτε το ν

4. * Να βρείτε μία γεωμετρική πρόοδο, αν $\alpha_4 = -6$ και $\alpha_8 = -\frac{2}{27}$.

5. * Αν σε μία γεωμετρική πρόοδο είναι $\alpha_3 = 12$ και $\alpha_8 = 384$, να βρείτε τον αριθμό λ.

6. * Αν σε μία γεωμετρική πρόοδο είναι $\alpha_1 = 8$ και $\lambda = \frac{1}{4}$

α) να βρείτε το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της S_4 και

β) το άθροισμα των άπειρων όρων της.

7. ** Στη γεωμετρική πρόοδο

α) με $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_\nu = \frac{1}{64}$ και $\lambda = \frac{1}{2}$ να βρείτε το πλήθος ν

β) με $\alpha_1 = -\frac{81}{4}$, $\alpha_5 = -\frac{1}{4}$ να βρείτε τον λόγο λ

8. ** Να βρείτε τη γεωμετρική πρόοδο, αν

α) $\alpha_4 - \alpha_2 = 24$, $\alpha_2 + \alpha_3 = 6$

β) $\frac{\alpha_4}{\alpha_6} = 4$ και $\alpha_2 \cdot \alpha_8 = \frac{1}{4}$

9. ** α) Αν σε μία γεωμετρική πρόοδο είναι $\alpha_4 = 13$ $\alpha_6 = 117$ και $\alpha_\nu = 9477$, να βρείτε το ν.

β) Να βρεθεί το πλήθος ν των όρων μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν), αν έχουμε: $\alpha_1 = 4$, $\alpha_\nu = 972$ και $S_\nu = 1456$

10. ** Να βρείτε τρεις διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου, οι οποίοι να έχουν άθροισμα 14 και γινόμενο 64.

11. ** Να βρείτε τέσσερις διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου, οι οποίοι να έχουν γινόμενο 16 και άθροισμα μεσαίων όρων 5.

12. ** Να βρείτε τέσσερις διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου, οι οποίοι να έχουν γινόμενο 625 και το τετράγωνο του τρίτου είναι τετραπλάσιο του γινομένου των δύο άκρων όρων.

13. ** Να βρείτε τρεις διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου, αν γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των δύο πρώτων είναι 10 και το άθροισμα των δύο τελευταίων είναι 15.

14. ** Να βρείτε τη γεωμετρική πρόοδος αν ο έκτος όρος είναι τετραπλάσιος του τέταρτου όρου της και το άθροισμα του δεύτερου και του πέμπτου όρου της είναι 216.

15. ** Να βρείτε τέσσερις διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου, αν ξέρετε ότι ο δεύτερος είναι μεγαλύτερος από τον πρώτο κατά 3 και ο τρίτος μικρότερος από τον τέταρτο κατά 12.

16. ** Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος 1, 3, 9, 27, 81.

α) Να βρείτε τα γινόμενα $\alpha_1 \cdot \alpha_5$, $\alpha_2 \cdot \alpha_4$, α_3^2

β) Να γενικεύσετε το συμπέρασμά σας

γ) Ισχύει $2 \cdot 12 = 4 \cdot 6$. Η ακολουθία 2, 4, 6, 12 είναι γεωμετρική πρόοδος;

δ) Τι συμπεραίνετε για το αντίστροφο του συμπεράσματος του (β);

17. ** α) Ποιο είναι το άθροισμα των 6 πρώτων όρων της: - 1, 2, - 4, 8, ...;

β) Πόσους διαδοχικούς πρώτους όρους πρέπει να προσθέσουμε, για να πάρουμε άθροισμα 85;

18. ** Να βρείτε το S_4 στη γεωμετρική πρόοδο με $\alpha_{10} = 48\sqrt{2}$, $\alpha_7 = 24$.

19. ** Να βρείτε τη γεωμετρική πρόοδο με $S_4 = 30$ και $\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 = 480$.

20. * Να βρείτε τα αθροίσματα άπειρων όρων των παρακάτω γεωμετρικών προόδων

α) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ β) $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \ldots$

γ) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$ δ) $\frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \ldots$

21. * Να βρείτε τον $α_1$ μιας γεωμετρικής προόδου, αν το άθροισμα S των άπειρων όρων της είναι 100 και ο $λ = \frac{1}{2}$.

22. * Να βρείτε το λόγο λ μιας γεωμετρικής προόδου, αν το άθροισμα S των άπειρων όρων της είναι 30 και το $α_1 = 10$.

23. ** Μιας γεωμετρικής προόδου με $|λ| < 1$ το άθροισμα S των άπειρων όρων της είναι $\frac{25}{4}$ και $α_1 + α_2 = 6$. Να βρείτε τον πρώτο όρο $α_1$ και το λόγο λ.

24. ** Μια γεωμετρική πρόοδος $α_1, α_2, α_3, ...$ έχει $|λ| < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι $α_1^2, α_2^2, α_3^2, ...$ είναι και αυτή γεωμετρική πρόοδος, να βρείτε το λόγο της και να δείξετε ότι είναι απολύτως μικρότερος του 1.

β) Αν το άθροισμα των άπειρων όρων μιας γεωμετρικής προόδου με $|λ| < 1$ είναι 6 και το άθροισμα των άπειρων όρων των τετραγώνων τους είναι 18, να βρείτε τον πρώτο όρο και το λόγο της.

25. ** Να βρείτε την γεωμετρική πρόοδο $(α_ν)$, εάν

α) $\frac{S_{10}}{S_5} = 32$, $α_1 = 2$

β) $S_3 = 26$ και η διαφορά $α_4 - α_1 = 52$.

26. ** Να βρείτε το άθροισμα $\frac{1}{ν} + \frac{1}{ν^2} + \frac{1}{ν^3} + ...$, αν ν φυσικός με $ν \geq 2$.

27. ** Να βρείτε τα αθροίσματα:

α) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{8} + ...$

β) $6 - 1 + 3 - \frac{3}{4} + \frac{3}{2} - \frac{9}{16} + \frac{3}{4} - \frac{27}{64} + ...$

γ) $\frac{2}{5} + 1 + \frac{4}{25} - \frac{1}{2} + \frac{8}{125} + \frac{1}{4} + \frac{16}{625} - \frac{1}{8} + ...$

δ) $\frac{2}{3} + \frac{4}{3^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{4}{3^4} + ...$

28. *** Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^x = 2046$

β) $1 + x + x^2 + ... = 5$ με $0 < x < 1$

γ) $1 + συνx + συν^2x + ... = 2$ με $-\frac{π}{2} < x < \frac{π}{2}$

29. ** Σε κάθε γεωμετρική πρόοδο, αν $α_μ$ και $α_k$ είναι οι όροι της τάξεως μ και κ αντίστοιχα, να δείξετε ότι ισχύει: $α_μ = λ^{μ-k} α_k$, μ, $k \in N$

30. ** α) Σε μια γεωμετρική πρόοδο έχουμε $α_1 + α_4 = α_2 + α_3$. Να βρεθεί ο λόγος της.

β) Αν α, β, γ, δ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να απλοποιήσετε την παράσταση: $Π = (α - γ)^2 + (β - γ)^2 + (β - δ)^2 - (α - δ)^2$

31. ** Δίνεται η ακολουθία με γενικό όρο $α_ν = 3 \cdot 2^ν$.

α) Να βρείτε τον όρο $α_{ν+1}$.

β) Να αποδείξετε ότι αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε το λόγο λ και τον πρώτο της όρο $α_1$.

γ) Ποιος όρος της είναι ίσος με 3072;

32. ** Δίνεται η ακολουθία με $S_ν = 2\ (3^ν - 1)$

α) Να βρείτε το $S_{ν-1}$

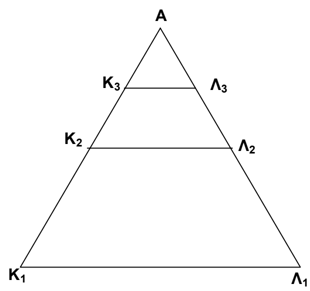
β) Να βρείτε το $α_ν$

γ) Να βρείτε το $α_{ν+1}$

δ) Να αποδείξετε ότι αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε τον λ και τον $α_1$.

ε) Πόσους όρους της πρέπει να πάρουμε, για να έχουμε άθροισμα 484;

33. ** Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο $ΑΚ_1Λ_1$ είναι ισόπλευρο πλευράς α.



$Κ_2$ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος Α $Κ_1$
$Λ_2$ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος Α $Λ_1$
$Κ_3$ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος Α $Κ_2$
$Λ_3$ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος Α $Λ_2$
Να συμπληρώσετε τους παρακάτω πίνακες:

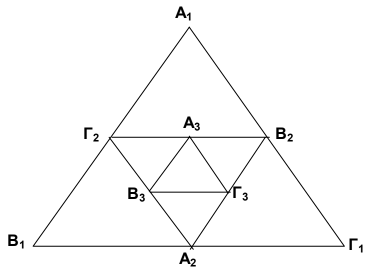
α)

Τρίγωνο	Πλευρά	Περίμετρος
$ΑΚ_1Λ_1$	$α_1 = α$	$Π_1 =$
$ΑΚ_2Λ_2$	$α_2 =$	$Π_2 =$
$ΑΚ_3Λ_3$	$α_3 =$	$Π_3 =$
	⋮	⋮
$ΑΚ_νΛ_ν$	$α_ν =$	$Π_ν =$

β) Εφαρμογή

Τρίγωνο	Πλευρά	Περίμετρος
$AK_1\Lambda_1$	$\alpha_1 =$ 8 μέτρα	$\Pi_1 =$
$AK_2\Lambda_2$	$\alpha_2 =$	$\Pi_2 =$
$AK_3\Lambda_3$	$\alpha_3 =$	$\Pi_3 =$
	$\vdots$	$\vdots$
$AK_\rho\Lambda_\rho$	$\alpha_\rho =$	$\Pi_\rho < 1$ και $\Pi_{\rho+1} \geq 1$ μέτρο
	M	M
$AK_8\Lambda_8$	$\alpha_8 =$	$\Pi_8 =$

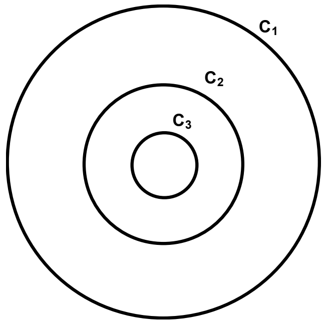
34. ** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α. Σχηματίζουμε το τρίγωνο $A_2B_2\Gamma_2$, όπου A_2, B_2, Γ_2 τα μέσα των πλευρών του $A_1B_1\Gamma_1$. Σχηματίζουμε το τρίγωνο $A_3B_3\Gamma_3$, όπου A_3, B_3, Γ_3 τα μέσα των πλευρών του $A_2B_2\Gamma_2$.



Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται επ' άπειρον. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

	Πλευρά	Εμβαδόν	Περίμετρος
$A_1B_1\Gamma_1$	$\alpha_1 = \alpha$	$E_1 =$	$\Pi_1 =$
$A_2B_2\Gamma_2$	$\alpha_2 =$	$E_2 =$	$\Pi_2 =$
$A_3B_3\Gamma_3$	$\alpha_3 =$	$E_3 =$	$\Pi_3 =$
…	…	…	…
$A_{10}B_{10}\Gamma_{10}$	$\alpha_{10} =$	$E_{10} =$	$\Pi_{10} =$
…	…	…	…
Αθροίσματα S απείρων όρων	$S_{\pi\lambda} =$	$S_E =$	$S_\Pi =$

35. ** Στο διπλανό σχήμα ο κύκλος c_1 έχει ακτίνα R και κέντρο το σημείο Κ. Οι ομόκεντροί του κύκλοι c_2 και c_3 έχουν ακτίνα $\frac{R}{2}$ και $\frac{R}{4}$ αντιστοίχως. Αν συνεχίσουμε με την ίδια διαδικασία να κατασκευάζουμε κύκλους (κάθε επόμενος να είναι ομόκεντρος του προηγούμενου του και να έχει τη μισή ακτίνα απ' αυτόν).



i) Να βρείτε, συναρτήσει του R, την ακτίνα των c_5, c_6

ii) Να βρείτε το μήκος του κύκλου c_7

iii) Να βρείτε το εμβαδόν του κύκλου c_{12}

iv) Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των 5 πρώτων κύκλων

v) Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των απείρων κύκλων που σχηματίζονται με τον παραπάνω τρόπο.

36. ** Ένας ασθενής παίρνει δόση των 10 mg ενός φαρμάκου κάθε 4ωρο. Στο χρονικό αυτό διάστημα διασπάται το $\frac{1}{4}$ της ποσότητας του φαρμάκου που βρίσκεται στην αρχή του 4ώρου στο αίμα του ασθενούς ενώ το υπόλοιπο παραμένει στο αίμα του ασθενούς.

α) Να βρείτε την ποσότητα του φαρμάκου που έχει στο αίμα του ο ασθενής μόλις πάρει την $2^η$ δόση του φαρμάκου.

β) Να βρείτε την ποσότητα του φαρμάκου που έχει στο αίμα του ο ασθενής στο τέλος του πρώτου 12ώρου.

γ) Αν είναι γνωστό ότι, όταν η ποσότητα του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς υπερβεί τα 50 mg, παρουσιάζονται επικίνδυνες παρενέργειες, δείξτε ότι ο ασθενής δεν κινδυνεύει ακόμη και με ισόβια λήψη του φαρμάκου.

δ) Ποια είναι η ποσότητα της επικίνδυνης δόσης.

37. ** Ένα αυτοκίνητο κοστίζει σήμερα 10.000.000 δρχ. Είναι γνωστό ότι στο τέλος κάθε χρόνου χάνει το $\frac{1}{10}$ της αξίας που έχει στην αρχή του χρόνου.

I. Τότε

i) Η αξία του αυτοκινήτου στο τέλος του πρώτου χρόνου είναι 9.500.000 δρχ. **Σ** **Λ**

ii) Οι αξίες στο τέλος κάθε χρόνου είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με λόγο $\frac{1}{10}$ **Σ** **Λ**

iii) Μετά την συμπλήρωση 2 χρόνων από την αγορά του η αξία του αυτοκινήτου μειώθηκε κατά 2.000.000 δρχ. **Σ** **Λ**

iv) Η αξία του είναι μεγαλύτερη από 5.000.000 δρχ. στο τέλος του 5^{ου} χρόνου από την αγορά του **Σ** **Λ**

v) Η αξία του είναι μικρότερη από 4.000.000 δρχ. στο τέλος του 8^{ου} χρόνου από την αγορά του **Σ** **Λ**

II. i) Η αξία του αυτοκινήτου στην αρχή του 3^{ου} χρόνου από την αγορά του είναι:

Α. 7.000.000 δρχ. **Β.** 7.200.000 δρχ. **Γ.** 7.290.000 δρχ.
Δ. 8.000.000 δρχ. **Ε.** 8.100.000 δρχ.

ii) Με την συμπλήρωση 3 χρόνων από την αγορά του η αξία του μειώθηκε κατά

Α. 4.000.000 δρχ. **Β.** 3.200.000 δρχ. **Γ.** 2.710.000 δρχ.
Δ. 1.900.000 δρχ. **Ε.** 1.710.000 δρχ.

iii) Η αξία του αυτοκινήτου γίνεται μικρότερη από 6.000.000 δρχ. στο τέλος του

Α. 3^{ου} χρόνου **Β.** 4^{ου} χρόνου **Γ.** 5^{ου} χρόνου
Δ. 6^{ου} χρόνου **Ε.** 7^{ου} χρόνου

38. ** α) Να συγκρίνετε τον αριθμητικό και τον γεωμετρικό μέσο των αριθμών: 2, 8.

β) Δείξτε ότι η σχέση που θα βρείτε ισχύει γενικά για κάθε ζεύγος θετικών x, y.

39. ** Αν α, β, γ αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου τότε να αποδείξετε ότι οι $\frac{1}{\alpha - \beta}$, $\frac{1}{\alpha - \gamma}$, $\frac{1}{\alpha + \beta}$ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

40. ** Να βρείτε τρεις ακέραιους αριθμούς, για τους οποίους ισχύουν τα εξής:

i) είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου

ii) αν αυξηθεί ο δεύτερος κατά 8, η πρόοδος γίνεται αριθμητική

iii) αν αυξηθεί και ο τρίτος κατά 64, γίνεται πάλι γεωμετρική.

41. ** Να βρείτε τρεις αριθμούς για τους οποίους ισχύουν τα εξής:

i) είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου

ii) έχουν άθροισμα 15

iii) αν σ' αυτούς προσθέσουμε τους αριθμούς 1, 4, 19 αντίστοιχα θα γίνουν διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

42. ** Να βρείτε τρεις ακέραιους αριθμούς για τους οποίους ισχύουν τα εξής:

i) είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου

ii) ελαττώνοντας τον τρίτο κατά 4 γίνονται διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου

iii) ελαττώνοντας τον δεύτερο και τον τρίτο της αριθμητικής προόδου κατά 1 σχηματίζεται πάλι γεωμετρική πρόοδος.

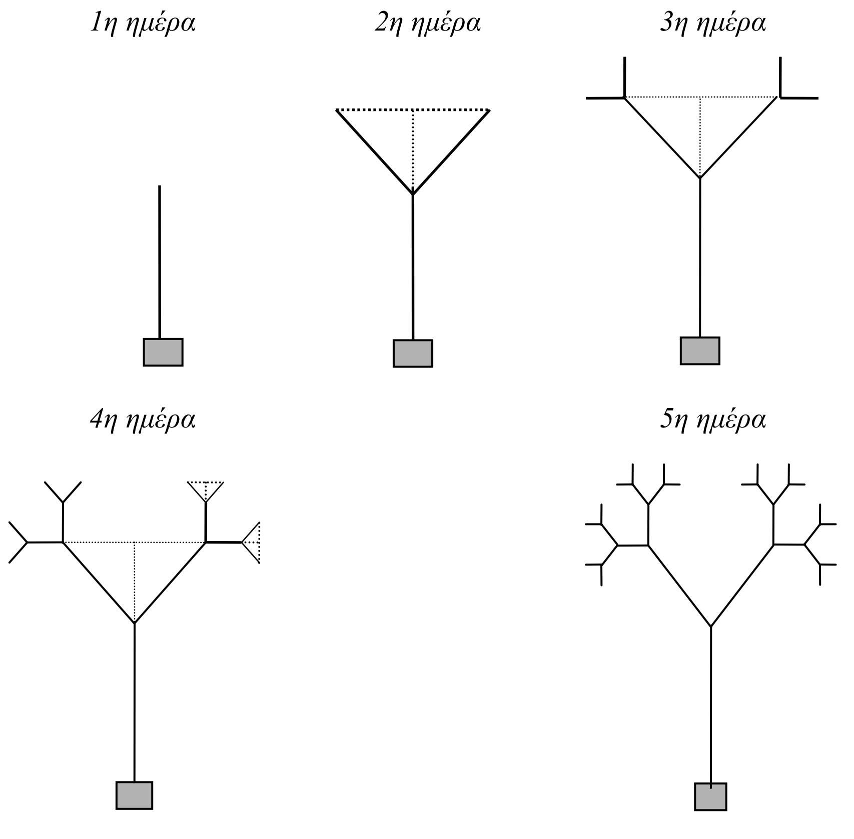
43. ** Να βρείτε τέσσερις ακέραιους αριθμούς για τους οποίους ισχύουν τα εξής:

i) οι τρεις πρώτοι είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου

ii) οι τρεις τελευταίοι είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου

iii) το άθροισμα των άκρων όρων είναι 14 και των μεσαίων 12.

44. *** Το απειρόδενδρο είναι ένα φυτό εσωτερικού χώρου που μεγαλώνει με ένα παράξενο τρόπο. Την 1η μέρα υψώνεται κατά 1m. Τη 2η αναπτύσσονται δυο νέα κλαδιά, μήκους $\frac{1}{2}$ m το καθένα, κάθετα μεταξύ τους. Την επομένη μέρα εμφανίζονται σε κάθε άκρο δυο νέα κλαδιά, κάθετα μεταξύ τους και μισά σε μήκος από τα κλαδιά που είχαν εμφανιστεί την προηγούμενη μέρα (δηλ. μήκους $\frac{1}{4}$ m το καθένα). Και αυτό συνεχίζεται καθημερινά (βλ. σχήμα).



Είναι δυνατό ένα τέτοιο δένδρο να χωρέσει στο σαλόνι σας, χωρίς να εμποδίζεται η ανάπτυξη του λόγω χώρου;

45. ** Ο Πέτρος γιορτάζοντας τα $12^{α}$ γενέθλιά του, ζήτησε από τους γονείς του για δώρο 15.000 και κάθε επόμενα γενέθλια να του αυξάνουν το ποσό κατά 3.000 μέχρι να γιορτάσει τα 21 χρόνια του.

Ο πατέρας του αντιπρότεινε τα εξής: “Θα σου δώσω τώρα 500 δρχ. και κάθε επόμενα γενέθλιά σου θα σου διπλασιάζω το προηγούμενο ποσό”. Ο Πέτρος σκέφτηκε λίγο και απέρριψε τη πρόταση του πατέρα του πιστεύοντας ότι όταν θα γιορτάζει τα $18^{α}$ γενέθλιά του με τη δική του πρόταση θα πάρει περισσότερα χρήματα.

α) Δικαιολογήσετε γιατί συμφωνείτε ή διαφωνείτε με την άποψη του Πέτρου.

β) Πόσα χρήματα θα πάρει με τη δική του πρόταση έως και τα $21^{α}$ γενέθλιά του και πόσα θα έπαιρνε με την πρόταση του πατέρα του;

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Γεωμετρικες Προοδοι

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου "Σωστό-Λάθος"

1.	Σ
2.	Σ
3.	Λ
4.	Σ
5.	Λ
6.	Σ

7.	Λ
8.	Σ
9.	Σ
10.	Σ
11.	Λ

12.	Λ
13.	Λ
14.	Σ
15.	Λ
16.	Λ
17.	Σ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1.	Δ
2.	Γ
3.	Δ
4.	Γ
5.	Δ
6.	Δ
7.	Β
8.	Ε
9.	Δ
10.	Β
11.	Β

12.	Δ
13.	Γ
14.	Ε
15.	Δ
16.	Δ
17.	Γ
18.	Δ
19.	Ε
20.	Α
21.	Δ
22.	Γ

23.	Δ
24.	Γ
25.	Ε
26.	Δ
27.	Α
28.	Γ
29.	Ε
30.	Δ
31.	Β
32.	Β
33.	Β
34.	Ε

Απαντήσεις στις ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. **α)** 1 • - 2 • 4 **β)** 54 • -18 • $\frac{2}{3}$

γ) ± 4 • ± 16 • 32 **δ)** 1 • $\frac{1}{4}$ • $\frac{1}{16}$

2. **α)** ± 16 **β)** 8 • 32 **γ)** $\pm 4\sqrt{2}$ • - 16 • $\pm 32\sqrt{2}$

3. **α)** xy^3 • xy^5 • xy^7 **β)** $\pm xy^2$ • $\pm x$ • $\pm \frac{x}{y^2}$

γ) $\frac{x}{y^3}$ • $\frac{x}{y}$ • x **δ)** $\frac{x\sqrt{y}}{y^2}$ • x • $xy\sqrt{y}$

4. **α)** α_{35} • α_{16} **β)** α_{1000}

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

1	Β
2	Δ
3	Α

2.

1	Γ
2	Α
3	Δ

3.

1	Γ
2	Β
3	Ε

4.

1	Γ
2	Δ

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. **α)** 5, 15, 45, ... **β)** $\frac{2}{3}, \frac{2}{12}, \frac{2}{48}, ...$ **γ)** - 20, - 10, - 5, ...

2. $x = 5$

3. **α)** $\alpha_6 = \frac{2}{243}$ **β)** $\alpha_1 = 14$ **γ)** $\lambda = \pm 2$ **δ)** $\nu = 5$

4. $\alpha_1 = -162$ & $\lambda = \frac{1}{3}$ ή $\alpha_1 = 162$ & $\lambda = -\frac{1}{3}$

5. $\lambda = 2$

6. **α)** $S_4 = \frac{85}{8}$ **β)** $S = \frac{32}{3}$

7. **α)** $\nu = 6$ **β)** $\lambda = \pm \frac{1}{3}$

8. **α)** $\alpha_1 = \frac{1}{5}$ & $\lambda = 5$ **β)** $\alpha_1 = \pm 8$ & $\lambda = \pm \frac{1}{2}$

9. **α)** $\nu = 10$ **β)** $\nu = 6$

10. Αν οι τρεις αριθμοί είναι $\frac{x}{\omega}$, x, xω τότε ισχύει ότι $\left.\begin{array}{l}\frac{x}{\omega} + x + x\omega = 14 \\ \frac{x}{\omega} \cdot x \cdot x\omega = 64\end{array}\right\}$, οπότε βρίσκουμε 2, 4, 8 (ή 8, 4, 2)

11. Έστω $\frac{x}{\omega^3}$, $\frac{x}{\omega}$, xω, $x\omega^3$ οι τέσσερις αριθμοί , οπότε βρίσκουμε $\frac{1}{4}$, 1, 4, 16 (ή 16, 4, 1, $\frac{1}{4}$)

12. Αν $\frac{x}{\omega^3}$, $\frac{x}{\omega}$, xω, $x\omega^3$ είναι οι τέσσερις αριθμοί, τότε βρίσκουμε ότι αυτοί είναι $\frac{5}{8}$, $\frac{5}{2}$, 10, 40 ή $-\frac{5}{8}$, $-\frac{5}{2}$, - 10, - 40

13. Ισχύει ότι $\alpha_1 + \alpha_2 = 10$ και $\alpha_2 + \alpha_3 = 15$, οπότε οι αριθμοί είναι 4, 6, 9

14. Ισχύει ότι $\alpha_6 = 4\alpha_4$ και $\alpha_2 + \alpha_5 = 216$, οπότε $\alpha_1 = 12$ και $\lambda = 2$ ή $\alpha_1 = \frac{108}{7}$ και $\lambda = -2$

15. Ισχύει ότι $\alpha_2 = \alpha_1 + 3$ και $\alpha_3 = \alpha_4 - 12$, οπότε βρίσκουμε τους αριθμούς 3, 6, 12, 24 ή - 1, 2, - 4, 8

16. **α)** 81 **β)** $\alpha_1 \cdot \alpha_\nu = \alpha_2\ \alpha_{\nu-1} = \alpha_3\ \alpha_{\nu-2} = \ldots$ (= α^2_μ αν υπάρχει μεσαίος όρος α_μ)
γ) όχι **δ)** δεν ισχύει

17. **α)** $S_6 = 21$ **β)** $\nu = 8$

18. $S_4 = 9\,(1 + \sqrt{2}\,)$

19. $\alpha_1 = 2$ και $\lambda = 2$ ή $\alpha_1 = -6$ και $\lambda = -2$

20. **α)** 2 **β)** $\frac{1}{3}$ **γ)** $\frac{3}{2}$ **δ)** $\frac{1}{4}$

21. $\alpha_1 = 50$

22. $\lambda = \frac{2}{3}$

23. $\alpha_1 = 5$ & $\lambda = \frac{1}{5}$ ή $\alpha_1 = \frac{15}{2}$ & $\lambda = -\frac{1}{5}$

24. **α)** $\lambda' = \lambda^2$ **β)** $\alpha_1 = 4$ & $\lambda = \frac{1}{3}$

25. **α)** Είναι $\frac{S_{10}}{S_5} = \frac{\alpha_1\lambda^9}{\alpha_1\lambda^4} = \lambda^5$, οπότε βρίσκουμε $\lambda = 2$

β) $\alpha_1 = 2$ και $\lambda = 3$

26. $\frac{1}{\nu - 1}$

27. **α)** $2 - \sqrt{2}$ **β)** 8 **γ)** $\frac{4}{3}$ **δ)** $\frac{3}{2}$

28. **α)** $x = 10$ **β)** $x = \pm 0,8$ **γ)** $x = \pm \frac{\pi}{3}$

29. $\alpha_\mu = \alpha_1\lambda^{\mu-1}$, $\alpha_\kappa = \alpha_1\lambda^{\kappa-1}$, διαιρούμε και έχουμε το ζητούμενο

30. **α)** $\lambda = \pm 1$ **β)** $\Pi = 0$

31. **α)** $\alpha_{\nu+1} = 3\cdot 2^{\nu+1}$ **β)** $\alpha_1 = 6$ & $\lambda = 2$ **γ)** $\nu = 10$

32. **α)** $S_{\nu-1} = 2(3^{\nu-1} - 1)$ **β)** $\alpha_\nu = 4\cdot 3^{\nu-1}$ **γ)** $\alpha_{\nu-1} = 4\cdot 3^{\nu}$
δ) $\alpha_1 = 4$ και $\lambda = 3$ **ε)** $\nu = 5$

33. **α)** $\alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$, $\alpha_3 = \frac{\alpha}{4}$, $\alpha_\nu = \frac{\alpha}{2^{\nu-1}}$, $\Pi_1 = 3\alpha$, $\Pi_2 = \frac{3\alpha}{2}$, $\Pi_3 = \frac{3\alpha}{4}$, $\Pi_\nu = \frac{3\alpha}{2^{\nu-1}}$

β) $\alpha_2 = 4$, $\alpha_3 = 2$, $\Pi_1 = 24$, $\Pi_2 = 12$, $\Pi_3 = 6$, $\Pi_\rho = 0{,}75$, $\rho = 6$, $\alpha_\rho = 0{,}25$

34. $\alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$, $\alpha_3 = \frac{\alpha}{4}$, $\alpha_{10} = \frac{\alpha}{2^9}$

$E_1 = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$, $E_2 = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{16}$, $E_3 = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{64}$, $E_{10} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4^{10}}$

$\Pi_1 = 3\alpha$, $\Pi_2 = \frac{3\alpha}{2}$, $\Pi_3 = \frac{3\alpha}{4}$, $\Pi_{10} = \frac{3\alpha}{2^9}$

$S_{\pi\lambda} = 2\alpha$, $S_E = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{3}$, $S_\Pi = 6\alpha$

35. **i)** $c_5 = \frac{R}{16}$, $c_6 = \frac{R}{32}$ **ii)** $\Gamma_7 = \frac{\pi R}{32}$ **iii)** $E_{12} = \frac{\pi R^2}{4^{11}}$

iv) $S_5 = \frac{341\pi R^2}{256}$ **v)** $S = \frac{4\pi R^2}{3}$

36. **α)** 17,5 mg **β)** $\cong$ 17,344 mg **γ)** 40 mg **δ)** 12,5 mg

Υπόδειξη: **α), β)** Η ποσότητα του φαρμάκου που παραμένει στο αίμα του ασθενούς είναι τα $\frac{3}{4}$ αυτής που υπήρχε στην αρχή του τετραώρου. Έχουμε δηλαδή γεωμετρική πρόοδο με λόγο 0,75.

γ) Το άθροισμα των απείρων όρων της γεωμετρικής προόδου αυτής είναι 40 mg.

δ) Η επικίνδυνη δόση είναι αυτή που θα δώσει άθροισμα απείρων όρων 50 mg κάτω από τις ίδιες προϋποθέσεις.

37. **I. i)** Λ **ii)** Λ **iii)** Λ **iv)** Σ **v)** Λ

II. i) Ε **ii)** Γ **iii)** Γ

38. **α)** $M_Γ = 4 < M_A = 5$

β) Έστω $M_Γ$ ο μέσος και M_A ο αριθμητικός μέσος των αριθμών x, y.

Θα δείξουμε ότι $M_Γ \le M_A$.

Πράγματι $\sqrt{xy} \le \dfrac{x+y}{2} \Leftrightarrow (\sqrt{xy})^2 \le \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 4xy \le (x+y)^2 \Leftrightarrow$

$(x - y)^2 \ge 0$, που ισχύει

39. Ισχύει $β^2 = αγ$. Πρέπει να δείξουμε ότι: $\dfrac{2}{α - γ} = \dfrac{1}{α - β} + \dfrac{1}{α + β}$ κλπ.

40. Αν x, y, ω οι αριθμοί τότε ισχύουν ότι $\left.\begin{aligned} y^2 &= xω \\ 2(y+8) &= x+ω \\ (y+8)^2 &= x(ω+64) \end{aligned}\right\}$

οπότε βρίσκουμε τους αριθμούς 4, 12, 36

41. Αν x, y, ω οι αριθμοί τότε ισχύουν ότι $\left.\begin{aligned} 2y &= x+ω \\ x+y+ω &= 15 \\ (y+4)^2 &= (x+1)(ω+19) \end{aligned}\right\}$

οπότε βρίσκουμε τους αριθμούς 2, 5, 8 ή τους 26, 5, - 16

42. Αν x, y, ω οι αριθμοί τότε ισχύουν ότι $\left.\begin{aligned} y^2 &= x\omega \\ 2y &= x + (\omega - 4) \\ (y-1)^2 &= x\,(\omega - 5) \end{aligned}\right\}$

οπότε βρίσκουμε τους αριθμούς 1, 3, 9

43. Αν x, y, ω, z οι αριθμοί τότε ισχύουν ότι $\left.\begin{aligned} y^2 &= x\omega \\ x + z &= 14 \\ 2\omega &= y + z \\ y + \omega &= 12 \end{aligned}\right\}$

οπότε βρίσκουμε τους αριθμούς 2, 4, 8, 12

44. S ύψους < 2 m, S πλάτους < 2 m, S "βάθους" < 1 m

Υπόδειξη: Υπολογίστε τα αθροίσματα των απείρων όρων των γεωμετρικών προόδων που δείχνουν την καθ' ύψος, κατά πλάτος και κατά "βάθος" ανάπτυξη του φυτού.

45. **α)** Πρόταση Πέτρου: 33.000, πρόταση πατέρα: 32.000 δρχ.

β) Πρόταση Πέτρου: 285.000, πρόταση πατέρα: 511.500 δρχ.

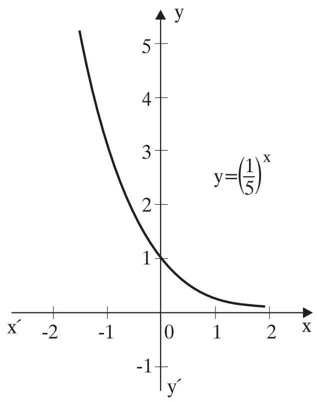
Κεφάλαιο 4ο:	ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Ερωτήσεις του τύπου "Σωστό - Λάθος"

1. Στο σχήμα 23 δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^x$.

Να χαρακτηρίσετε ως σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις.



Σχ.23

i) Η f έχει πεδίο ορισμού το R **Σ** **Λ**

ii) Η f έχει σύνολο τιμών το R **Σ** **Λ**

iii) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο R **Σ** **Λ**

iv) Η f έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y **Σ** **Λ**

v) Η γραφική παράσταση της f έχει ασύμπτωτη τον θετικό ημιάξονα των x **Σ** **Λ**

vi) Η γραφική παράσταση της f είναι συμμετρική με άξονα συμμετρίας τον y΄y προς τη γραφική παράσταση της $g(x) = 5^x$. **Σ** **Λ**

vii) Ισχύει ότι $f(2) > f(1/5)$ **Σ** **Λ**

viii) Ισχύει ότι $f(2^{1999}) > f(2^{2000})$ **Σ** **Λ**

ix) Το σημείο Α (0, 1) ανήκει στην γραφική παράσταση της f **Σ** **Λ**

x) Το σημείο $M\left(\sqrt[5]{2}, -5^{-2}\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f. **Σ** **Λ**

2. * Ισχύει ότι:

i) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 2^x$, για κάθε $x \in R$ **Σ** **Λ**

ii) $\left(\sqrt{3}\right)^x \neq \left(\sqrt{5}\right)^x$, για κάθε $x \in R$ **Σ** **Λ**

iii) $\left(\sqrt{3}\right)^{-x} > 3^x$, για κάθε $x \in R$ **Σ** **Λ**

iv) $(-1)^{2x} = 1^{2x}$, αν x ακέραιος **Σ** **Λ**

v) $(-1)^{2x+1} = -1$, αν x ακέραιος **Σ** **Λ**

3. * Ισχύει ότι:

i) $(x+1)^{x-1} = 1$ αν $x = 1$ **Σ** **Λ**

ii) $(x-1)^x = 1$, αν $x = 0$ **Σ** **Λ**

iii) $x^{1+x} = 1$, αν $x = 1$ **Σ** **Λ**

iv) $x^{x-1} = 1$, αν $x = 1$ **Σ** **Λ**

v) $(1-x)^{x+1} = 1$ αν $x = -1$ **Σ** **Λ**

4. * Ισχύει ότι:

i) $(0{,}8)^x > (0{,}8)^y$, αν $x < y$ **Σ** **Λ**

ii) $(1{,}5)^x < (1{,}5)^y$, αν $x < y$ **Σ** **Λ**

iii) $\left(\frac{1}{5}\right)^x < \left(\frac{1}{5}\right)^y$, αν $x < y$ **Σ** **Λ**

iv) $(0{,}31)^x < (0{,}31)^y$, αν $x > y$ **Σ** **Λ**

v) $(2e)^x > (2e)^y$, αν $x > y$ **Σ** **Λ**

vi) $\left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{2}{3}\right)^y$, αν $x > y$ **Σ** **Λ**

Κεφάλαιο 4ο:	ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. * Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης με τύπο $f(x) = 2^x$ (Σχ.1) είναι

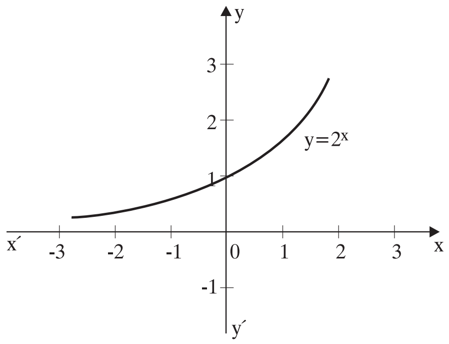
Α. το διάστημα $[0,+\infty)$

Β. το διάστημα $(0,+\infty)$

Γ. το σύνολο R

Δ. το σύνολο R - {1}

Ε. το σύνολο R^*



Σχ.1

2. * Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης με τύπο $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (Σχ. 2) είναι

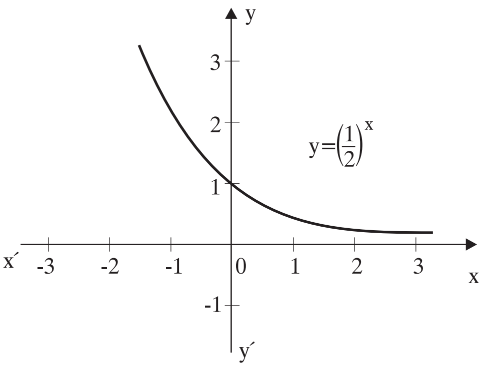
Α. το διάστημα $[0,+\infty)$

Β. το σύνολο R

Γ το διάστημα $(0,+\infty)$

Δ. το σύνολο R - {1}

Ε. το σύνολο R^*



Σχ.2

3. * Η εκθετική συνάρτηση με τύπο $f(x) = \alpha^x$ με $0 < \alpha \neq 1$ έχει πεδίο ορισμού

Α. το διάστημα $[0,+\infty)$ **Β.** το διάστημα $(0,+\infty)$

Γ. το σύνολο $R - \{1\}$ **Δ.** το σύνολο R **Ε.** το σύνολο R^*

4. * Το σύνολο τιμών της συνάρτησης με τύπο $f(x) = 3^x$ (Σχ.3) είναι

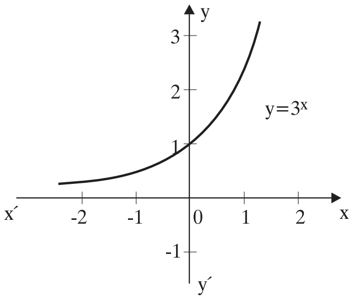
Α. το διάστημα $[0,+\infty)$

Β. το διάστημα $(-\infty,0]$

Γ. το διάστημα $(-\infty,0)$

Δ. το διάστημα $(0,+\infty)$

Ε. το σύνολο R^*



Σχ.3

5. * Το σύνολο τιμών της συνάρτησης με τύπο $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ (Σχ. 4) είναι

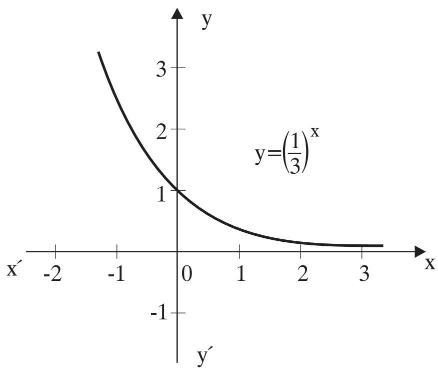
Α. το διάστημα $[0,+\infty)$

Β. το διάστημα $(-\infty,0]$

Γ. το διάστημα $(-\infty,0]$

Δ. το σύνολο R^*

Ε. το διάστημα $(0,+\infty)$



Σχ.4

6. * Η εκθετική συνάρτηση με τύπο $f(x) = \alpha^x$ με $0 < \alpha \neq 1$ έχει σύνολο τιμών

Α. το διάστημα $(0,+\infty)$ **Β.** το διάστημα $(-\infty,0]$

Γ. το διάστημα $(-\infty,0)$ **Δ.** το διάστημα $[0,+\infty)$

Ε. το σύνολο R^*

7. * Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = 4^x$ (Σχ. 5)

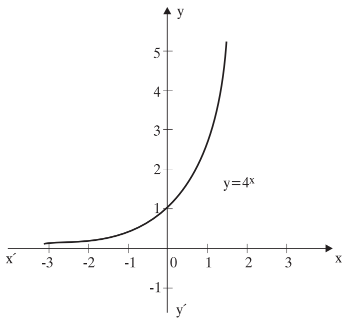
Α. έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y

Β. τέμνει μόνο τον άξονα y΄y στο σημείο (0,1).

Γ. τον άξονα y΄y σε 2 σημεία.

Δ. έχει ασύμπτωτη τον θετικό ημιάξονα Ox

Ε. τίποτα από τα προηγούμενα.



Σχ.5

8. * Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ (Σχ.6)

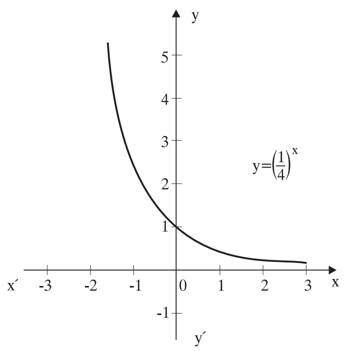
Α. έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y

Β. τον άξονα y΄y σε 2 σημεία.

Γ. τέμνει μόνο τον άξονα y΄y στο σημείο (0, 1).

Δ. έχει ασύμπτωτη τον αρνητικό ημιάξονα Ox

Ε. τίποτα από τα προηγούμενα.



Σχ.6

9. * Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = α^x$ με $0 < α \neq 1$

Α. τέμνει μόνο τον άξονα y΄y στο σημείο (0, 1)

Β. έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y

Γ. τον άξονα y΄y σε 2 σημεία.

Δ. έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη του y΄y

Ε. τίποτα από τα προηγούμενα.

10. * Η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ (Σχ.7) είναι:

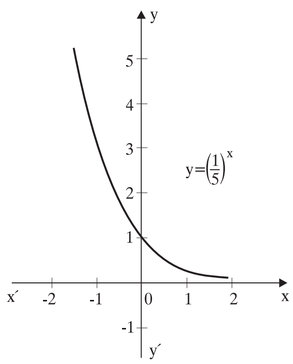
Α. γνησίως φθίνουσα

Β. άρτια

Γ. περιττή

Δ. γνησίως αύξουσα

Ε. δεν είναι μονότονη



Σχ.7

11. * Η συνάρτηση με τύπο $f(x) = 5^X$ (Σχ.8) είναι

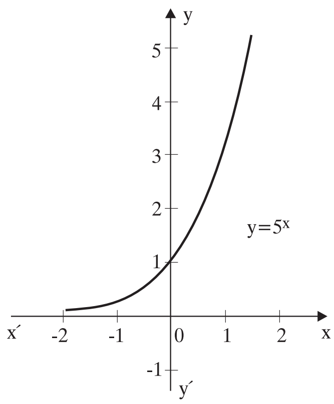
Α. γνησίως φθίνουσα

Β. άρτια

Γ. περιττή

Δ. γνησίως αύξουσα

Ε. δεν είναι μονότονη



Σχ.8

12. * Η εκθετική συνάρτηση με τύπο $f(x) = α^x$ με $0 < α < 1$ είναι πάντοτε

Α. γνησίως φθίνουσα **Β.** σταθερή **Γ.** περιοδική

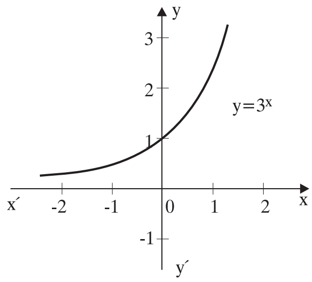
Δ. γνησίως αύξουσα **Ε.** δεν είναι μονότονη

13. * Η εκθετική συνάρτηση με τύπο $f(x) = α^x$ με $α > 1$ είναι πάντοτε

Α. γνησίως φθίνουσα **Β.** άρτια **Γ.** περιττή

Δ. γνησίως αύξουσα **Ε.** δεν είναι μονότονη

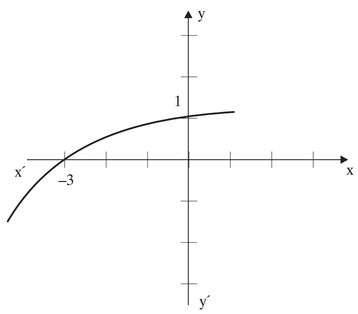
14. * Στο Σχ. 9 είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = 3^x$



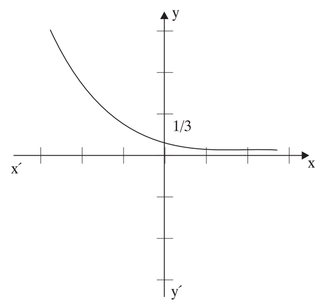
Σχ.9

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $g(x) = -\ 3^x$ είναι

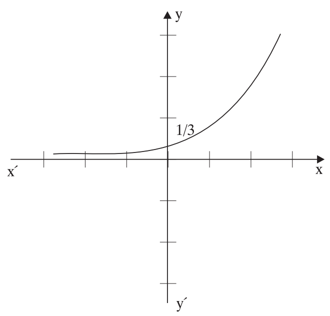
Α.



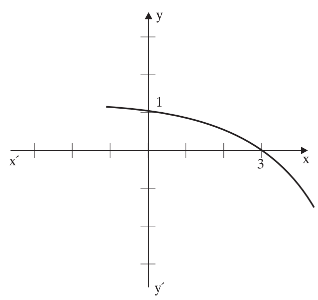
Γ.



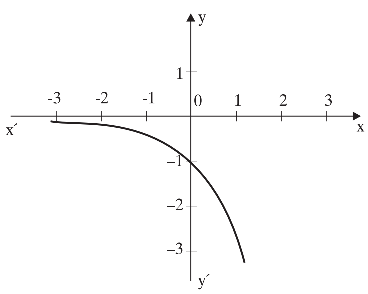
Β.



Δ.

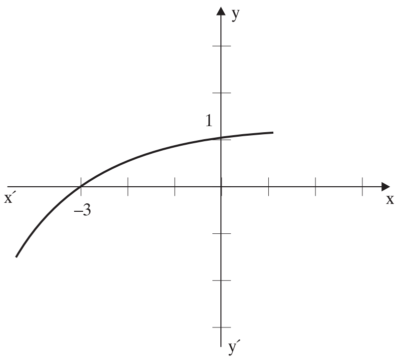


Ε.

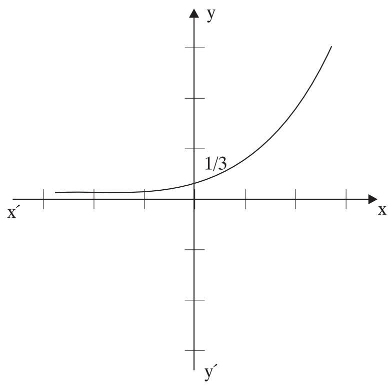


β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο h (x) = 3^{-x} είναι

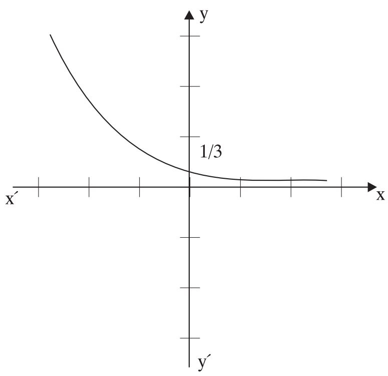
Α.



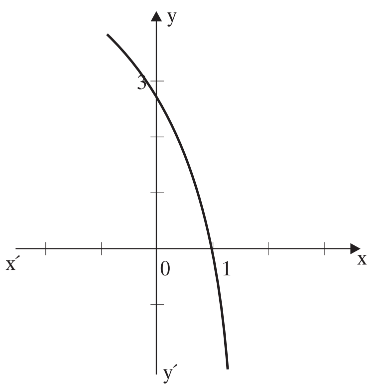
Β.



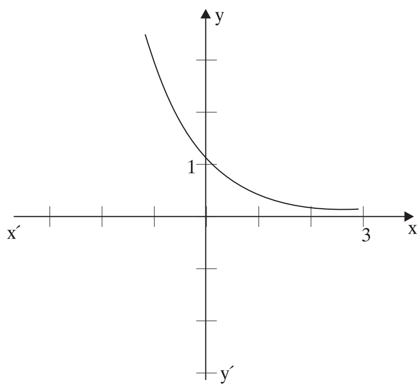
Γ.



Δ.



Ε.



15. ***** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο g (x) = - 2^X είναι συμμετρική με την γραφική παράσταση της f (x) = 2^X (Σχ.11) ως προς

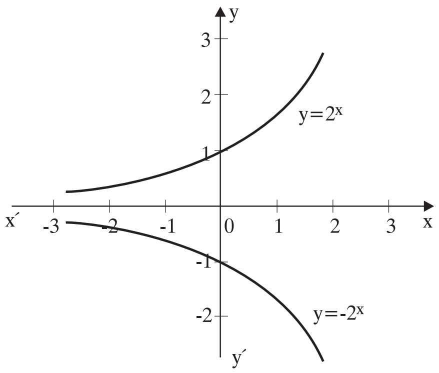
Α. τον άξονα y΄y

Β. την ευθεία y = x

Γ. την ευθεία y = -x

Δ. τον άξονα x΄x

Ε. κέντρο το Ο(0,0)



Σχ. 11

16. ***** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο g (x) = $\left(\frac{1}{5}\right)^x$ είναι συμμετρική με την γραφική παράσταση της f (x) = 5^X (Σχ.12) ως προς

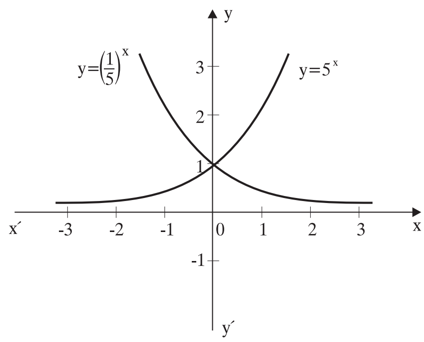
Α. τον άξονα x΄x

Β. τον άξονα y΄y

Γ. την ευθεία y = $\frac{1}{5}$

Δ. την ευθεία y = 5

Ε. κέντρο το Ο(0, 0)



Σχ. 12

17. * Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2^x$. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή;

Α. η f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$

Β. η f έχει σύνολο τιμών το σύνολο R

Γ. η f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού οης

Δ. η γραφική της παράσταση τέμνει τον x΄x στο σημείο Α(0, 1)

Ε. η γραφική της παράσταση έχει ασύμπτωτη τον αρνητικό ημιάξονα των x.

18. * Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή;

Α. η f είναι γνησίως αύξουσα στο R

Β. η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R

Γ. η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

Δ. η γραφική παράσταση της f τέμνει τον y΄y στο σημείο Μ (0, 1/2)

Ε. η γραφική παράσταση της f τέμνει τον x΄x στο σημείο Ν (1, 0)

19. * Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = 2^x$ τότε ισχύει

Α. $f(2) > f(3)$ **Β.** $f(2) < f(3)$ **Γ.** $f(2) \geq f(3)$

Δ. $f(2) = 2f(3)$ **Ε.** $f(2) = f(3)$

20. * Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ τότε ισχύει

Α. $f(2) < f(3)$ **Β.** $f(2) \leq f(3)$ **Γ.** $f(2) > f(3)$

Δ. $f(2) = 3f(3)$ **Ε.** $f(2) = f(3)$

21. * Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = 3^x$ τότε **δεν** είναι σωστή η

Α. $f(0,5) < f(0,8)$ **Β.** $f(-2) > f(-3)$ **Γ.** $f\left(\frac{1}{5}\right) > f\left(\frac{1}{7}\right)$

Δ. $f(1, 3) > f(-1, 3)$ **Ε.** $f(\sqrt{3}) > f(\sqrt{5})$

22. * Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = 3^X$ τότε i $\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2$ είναι ίσος με

Α. $\frac{3}{2}$ **Β.** $\frac{4}{9}$ **Γ.** 9 **Δ.** 3 **Ε.** $\sqrt{3}$

23. * Αν α > 0, μ, ν θετικιί ακέραιοι με $\nu \geq 2$ τότε το $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ ισούται με

Α. $\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}}$ **Β.** $\left(\sqrt{\alpha^{\mu}}\right)^{\nu}$ **Γ.** $\left(\sqrt{\alpha^{\nu}}\right)^{\mu}$ **Δ.** $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$

Ε. τίποτα από τα προηγούμενα

24. * Το $32^{\frac{1}{5}}$ ισούται με

Α. $\frac{1}{32^5}$ **Β.** 2 **Γ.** $-\frac{1}{2}$ **Δ.** 32^{-5} **Ε.** $\frac{1}{\sqrt[5]{32}}$

25. * Αν $3^{\sqrt{x}} = 27$, τότε το x είναι

Α: 27 **Β:** 1/9 **Γ:** 0 **Δ:** 3 **Ε:** 9

26. * Δίνεται η εξίσωση $2^{x^2-5x+10} = 16$. Τότε το x είναι

Α. 1 ή -1 **Β.** 2 ή 3 **Γ.** -2 ή -3 **Δ.** 0

Ε. τίποτα από τα προηγούμενα

27. * Αν $2^{2^x} = 16$, τότε το x είναι

Α. 4 **Β.** 1 **Γ.** 2 **Δ.** -1 **Ε.** -2

28. * Αν $f(x) = 2^X$, τότε το f (f (2)) ισούται με

Α. 16 **Β.** 8 **Γ.** 32 **Δ.** 1 **Ε.** 4

29. * Η εξίσωση $3^X + 2^X = 2$ έχει λύση τον αριθμό

Α. -2 **Β.** -1 **Γ.** 1 **Δ.** 2 **Ε.** 0

30. *Η εξίσωση $3^X + 3^{-X} = -1$

Α. έχει λύση ένα θετικό αριθμό

Β. έχει λύση ένα αρνητικό αριθμό

Γ. έχει λύση κάθε πραγματικό αριθμό $\neq 0$

Δ. είναι αδύνατη

Ε. έχει λύση την $x = 0$

31. Δίνεται η ανίσωση $3^{x-2} > 1$. Τότε ισχύει

Α. $x > 2$ **Β.** $x = 0$ **Γ.** $x < 2$ **Δ.** $x \leq 2$ **Ε.** $x = 2$

32. * Δίνεται η ανίσωση $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \geq 1$. Τότε ισχύει

Α. $x \geq 2$ **Β.** $x = -1$ **Γ.** $x \leq 1$ **Δ.** $x > 1$ **Ε.** $x > 2$

33. * Δίνεται η ανίσωση $5^{x+1} < 625$. Τότε ισχύει

Α. $x = 3$ **Β.** $x \geq 3$ **Γ.** $x = 5$ **Δ.** $x > 3$ **Ε.** $x < 3$

34. * Δίνεται η ανίσωση $\left(\frac{2}{3}\right)^{x} \geq \frac{16}{81}$. Τότε ισχύει

Α. $x \geq 16$ **Β.** $x \leq 4$ **Γ.** $x > 4$ **Δ.** $x = 16$

Ε. τίποτα από τα προηγούμενα

35. * Η ανίσωση $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} < 2$ αληθεύει

Α. Για $x \in (-\infty, -1)$ **Β.** Για $x \in (-\infty, -1]$ **Γ.** Για $x \in (-\infty, 0)$

Δ. Για $x \in (-1, +\infty)$ **Ε.** Για κάθε $x \in R$

36. * Έστω η εκθετική συνάρτηση με τύπο $f(x) = \alpha^x$ με $0 < \alpha \neq 1$.

Ποιο από τα παρακάτω σημεία αποκλείεται να ανήκει στη γραφική παράσταση της f;

Α. (-2, 8), **Β.** (0, 1), **Γ.** (3, -27), **Δ.** (3, 2) **Ε.** (2, 3)

37. ** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2^x$ και $g(x) = e^x$. Τότε ισχύει ότι

Α. $f(e) = g(e)$ **Β.** $f(e) > g(e)$ **Γ.** $f(2) < g(2)$

Δ. $f\left(\frac{1}{2}\right) > g\left(\frac{1}{2}\right)$ **Ε.** $f\left(\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right)$

38. ** Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^x$ και $y = e$ (Σχ.13) που τέμνονται στο σημείο $A(x_o, e)$. Το x_o είναι ίσο με

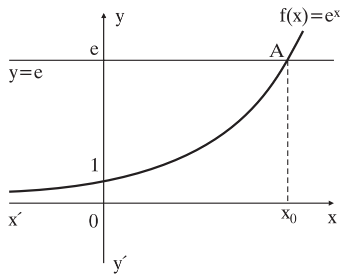
Α. e

Β. 1

Γ. $\frac{1}{2}$

Δ. $\sqrt{e}$

Ε. $\frac{3}{2}$



Σχ.13

Κεφάλαιο 4ο: ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Ερωτήσεις διάταξης

1. * Να τοποθετήσετε σε μια σειρά από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς

$A = 3^{0,5}$ $\quad B = \frac{1}{3}$ $\quad \Gamma = 3^{\sqrt{3}}$ $\quad \Delta = 1$ $\quad E = 3$

2. * Να τοποθετήσετε σε μια σειρά από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς

$A = 0,5^2$ $\quad B = 2$ $\quad \Gamma = 0,5^{0,5}$ $\quad \Delta = 1$ $\quad E = 0,5^{\sqrt{2}}$

3. ** Να τοποθετήσετε σε μια σειρά από το μεγαλύτερο προς το μικρότερο τις αριθμητικές τιμές των παραστάσεων, αν $x \in R$

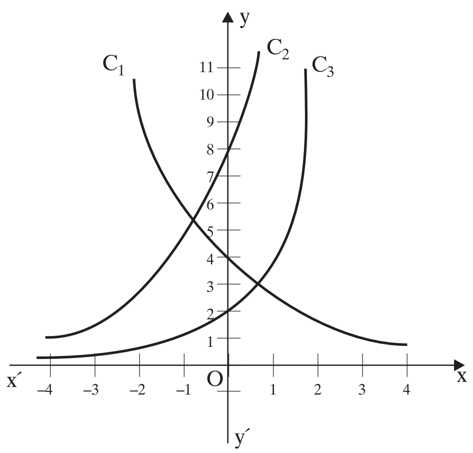
$A = 0,5^X$ $\quad B = 2^X$ $\quad G = 3^X$ $\quad D = 1$ $\quad E = e^x$

Κεφάλαιο 4ο:	**ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ**

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. Στη στήλη Α του πίνακα (Ι) υπάρχουν οι γραφικές παραστάσεις κάποιων από τις συναρτήσεις που ο τύπος τους αναγράφεται στη στήλη Β.

Πίνακας (Ι)

<table>
<tr><th>Στήλη Α</th><th>Στήλη Β</th></tr>
<tr><td>


Σχ.14
</td><td>
$f_1(x)=2\cdot 4^x$
$f_2(x)=8\cdot 2^x$
$f_3(x)=4\cdot 2^x$
$f_4(x)=2\cdot 4^{-x}$
$f_5(x)=4\cdot 2^{-x}$
</td></tr>
</table>

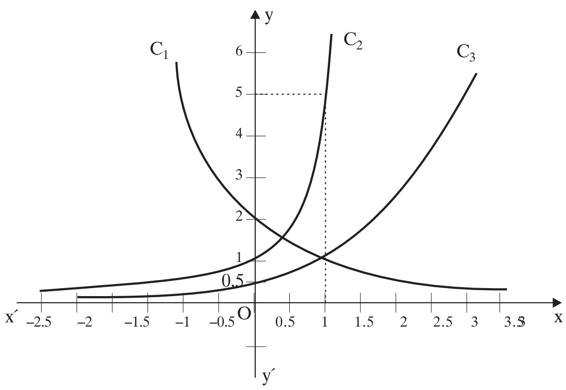
Να συμπληρώσετε τον πίνακα (ΙΙ) ώστε σε κάθε γραφική παράσταση της στήλης Α να αντιστοιχεί ο τύπος της συνάρτησης που βρίσκεται στη στήλη Β.

Πίνακας (ΙΙ)

C_1	C_2	C_3

2. Στη στήλη Α του πίνακα (Ι) υπάρχουν οι γραφικές παραστάσεις κάποιων από τις συναρτήσεις που ο τύπος τους αναγράφεται στη στήλη Β.

Πίνακας (Ι)

<table>
<tr><th>Στήλη Α</th><th>Στήλη Β</th></tr>
<tr><td>

Σχ.15</td><td>$f_1(x) = 5^x$
$f_2(x)=2^x$
$f_3(x)=\frac{1}{2}\cdot 2^x$
$f_4(x)=2\cdot 3^{-x}$
$f_5(x)=3^{-x}$</td></tr>
</table>

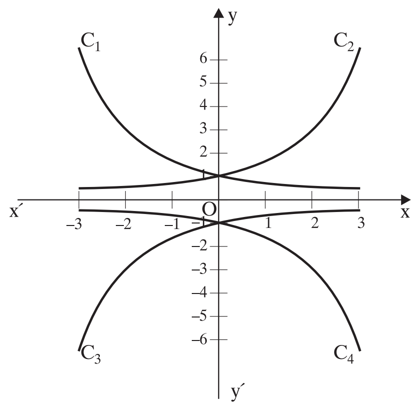
Να συμπληρώσετε τον πίνακα (ΙΙ) ώστε σε κάθε γραφική παράσταση της στήλης Α να αντιστοιχεί ο τύπος της συνάρτησης που βρίσκεται στη στήλη Β.

Πίνακας (ΙΙ)

C_1	C_2	C_3

Ερώτηση συμπλήρωσης

1. Στο διπλανό σχήμα υπάρχει η γραφική παράσταση C_1 της $f(x) = 2^{-x}$, η καμπύλη C_2 συμμετρική της C_1 ως προς τον άξονα y΄y, η καμπύλη C_3 συμμετρική της C_1 ως προς τον άξονα x΄x και η καμπύλη C_4 συμμετρική της C_1 ως προς την αρχή O (0,0) των αξόνων.



Σχ.16

Να συμπληρώσετε στον παρακάτω πίνακα τους τύπους των συναρτήσεων $f_2(x)$, $f_3(x)$ και $f_4(x)$ των οποίων οι C_2, C_3 και C_4 αποτελούν τις γραφικές παραστάσεις αντίστοιχα.

Καμπύλη	**C_1**	**C_2**	**C_3**	**C_4**
Τύπος συνάρτησης	$f_1(x) = 2^{-x}$	$f_2(x) =$	$f_3(x) =$	$f_4(x) =$

Κεφάλαιο 4ο:	ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. * Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $3^{2x}=\dfrac{1}{81}$ **ii)** $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x}=27$ **iii)** $2^{-x}=32$

iv) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-x}=27$ **v)** $\dfrac{1}{2^{x}}=16$

2. * Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $2^{x^2-5x+6}=1$ **ii)** $\left[3^{\left(x^2-9\right)}\right]^{(x-2)}=1$ **iii)** $4^{3x}=2^4\cdot 16^{\frac{x}{2}}$

iv) $9^x-2\,3^x-3=0$ **v)** $3^{2x-2}+3^x=4$ **vi)** $5^{2x-1}+5^{x+1}=250$

3. * Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $2^x-5\sqrt{2^x}+4=0$ **ii)** $5\cdot 2^x=2^{x+3}-3\sqrt{2}$ **iii)** $3^{x+1}-28+9\cdot 3^{-x}=0$

iv) $2^{x-2}-3^{x-3}-2^{x-3}+3^{x-4}=0$ **v)** $4^x-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$

4. ** Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $(x^2-5x+5)^{x+2}=1$ **ii)** $e^{2x}+e=e^x+e^{x+1}$

5. ** Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $3^{\eta\mu 2x}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ **ii)** $3^{\eta\mu 2x-\sigma\upsilon\nu x}=9^{1-2\eta\mu^2\frac{x}{2}}$

iii) $2^{\eta\mu x}\cdot\left(4^{\eta\mu x}\right)^{\sigma\upsilon\nu x}=\sqrt[5]{32^{\eta\mu 3x}}$

6. ** Να λύσετε τις ανισώσεις

i) $3^{x^2-7x+6}<1$ **ii)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}<\left(\frac{1}{4}\right)^{x+\frac{5}{2}}$

iii) $(0,5)^{5x-x^2-1}<0,125$ **iv)** $4^x-6\cdot 2^x+8<0$

7. ** Να λύσετε τα συστήματα

i) $\begin{cases} 9^{x+1}=3^{y+3} \\ 4^{x+y}=8\cdot 2^x \end{cases}$ **ii)** $\begin{cases} 2^{x^2-5x+6}=1 \\ x+y=8 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} 2^{x-1}\cdot 4^y=1 \\ 3^x\cdot 3^{y-1}=9 \end{cases}$ **iv)** $\begin{cases} 3^x-5^y=4 \\ 9\cdot 3^{-x}+5^y=6 \end{cases}$

8. ** **i)** Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε τις συναρτήσεις:

$$f(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^x \text{ και } g(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x$$

ii) Να εξηγήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα y΄y.

9. ** Αν f και g δύο συναρτήσεις με $f(x)=\frac{1}{2}(\alpha^x+\alpha^{-x})$ και $g(x)=\frac{1}{2}(\alpha^x-\alpha^{-x})$ να αποδείξετε ότι: f (x+y) = f (x) · f (y) + g(x) · g(y).

10. ** **i)** Να βρείτε το (α ≠ 5) ώστε η $f(x)=\left(\frac{1-\alpha}{\alpha-5}\right)^x$ να είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Να βρείτε το α, (α ≠ 0) ώστε η $g(x)=\left(1-\dfrac{5}{\alpha}\right)^{x}$ να είναι γνησίως φθίνουσα.

11. ** Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\left(1-k^2\right)^x$.

α) Για ποιες τιμές του k ορίζεται η f;

β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του k για τις οποίες η f είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Να βρείτε το k ώστε η γραφική παράσταση της f (x) να περνάει από το σημείο $P\left(1,\frac{1}{2}\right)$.

δ) Να βρείτε τις τιμές του k ώστε η γραφική παράσταση της f (x) να περνάει από το σημείο Σ (2, 1).

12. ** Σ' ένα ασθενή με υψηλό πυρετό χορηγείται ένα αντιπυρετικό φάρμακο. Η θερμοκρασία (πυρετός) Θ (t) του ασθενούς t ώρες μετά την λήψη του φαρμάκου δίνεται από τον τύπο $\Theta(t)=36+4\left(\frac{1}{2}\right)^t$ σε βαθμούς Κελσίου.

α) Να βρείτε πόσο πυρετό είχε ο ασθενής τη στιγμή που του χορηγήθηκε το φάρμακο.

β) Να βρείτε σε πόσες ώρες η θερμοκρασία του ασθενούς θα πάρει την φυσιολογική τιμή των 36,5°C.

γ) Αν η επίδραση του αντιπυρετικού διαρκεί 4 ώρες πόση θα είναι η θερμοκρασία του ασθενούς μόλις σταματήσει η επίδραση του φαρμάκου.

13. *** Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = k\alpha^x$, $0 < \alpha \neq 1$ και $k \in R$

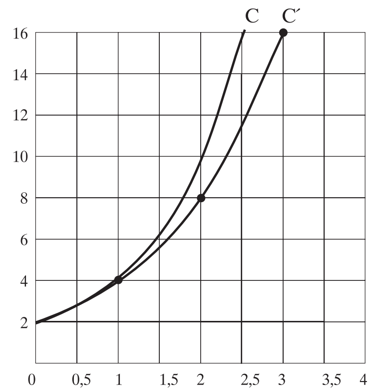
i) Να βρείτε τους λόγους:

$$\frac{f(x+1)}{f(x)}, \frac{f(x+2)}{f(x+1)}, \frac{f(x+7)}{f(x+6)}$$

ii) Να βρείτε τους λόγους:

$$\frac{f(x+3)}{f(x)}, \frac{f(x+6)}{f(x+3)}, \frac{f(x+16)}{f(x+13)}$$

iii) Να αποδείξετε ότι ο λόγος των τιμών της f (x) που αντιστοιχούν σε ζεύγη τιμών της μεταβλητής x που ισαπέχουν είναι σταθερές. (Ζεύγη τιμών που ισαπέχουν είναι (x, x + 3), (x + 3, x + 6), (x + 12, x + 15) κλπ.



Σχ.17

iv) Στο σχήμα 17 δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μιας εκθετικής συνάρτησης και μιας παραβολής.

Χρησιμοποιώντας το ερώτημα (iii), να βρείτε ποια είναι η γραφική παράσταση της εκθετικής.

Παρατήρηση: Το ερώτημα (iii) εφαρμόζεται ως *κριτήριο αναγνώρισης* μίας καμπύλης αν είναι γραφική παράσταση εκθετική και ως *κριτήριο αναγνώρισης* αν ένας πίνακας τιμών x, y ορίζει μία εκθετική συνάρτηση.

14. ** Ένα δείγμα 5 Kgr ενός ραδιενεργού ισοτόπου διασπάται σύμφωνα με τον τύπο: $Q(t) = Q_o \cdot e^{-kt}$ όπου Q (t) παριστάνει την ποσότητα που απομένει μετά από χρόνο t, $Q_o = Q(0)$ η αρχική ποσότητα (για t = 0) και k σταθερά που εξαρτάται από το υλικό.

Αν το μισό του αρχικού δείγματος διασπάστηκε σε 10 min., να βρείτε πόση ποσότητα ραδιενεργού υλικού θα έχει απομείνει μετά από 40 min.

15. ** Ένας βιολόγος μελετώντας την ανάπτυξη ενός είδους βακτηριδίων παρατηρεί ότι:

i) 2 ώρες μετά την έναρξη της παρατήρησης τα βακτηρίδια ήταν 400.

ii) 4 ώρες μετά την έναρξη της παρατήρησης τα βακτηρίδια ήταν 3.200.

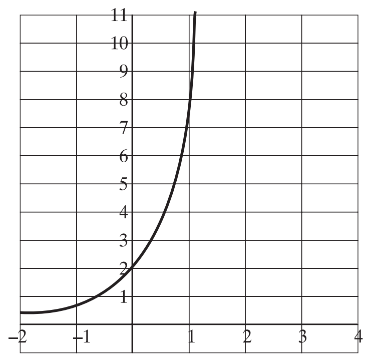
Αν ο ούπος που δίνει τον αριθμό των βακτηριδίων αίναι $P(t) = P_o \cdot 2^{kt}$, όπου P(t) ο αριθμός των βακτηριδίων οε χρόνο t, P_0 ο αρχικός αριθμός και k σταθερά που εξαρτάται από το είδος των βακτηριδίων τότε:

α) Να βρείτε τη σταθερά k.

β) Να βρείτε τον αρχικό αριθμό των βακτηριδίων.

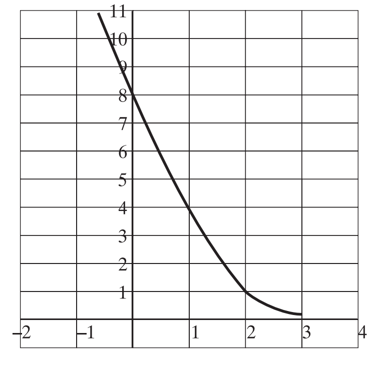
γ) Σε πόσα λεπτά ο αρχικός αριθμός των βακτηριδίων είχε διπλασιαστεί;

16. ** **α)** Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = k \cdot 4^{X}$ είναι η καμπύλη του σχήματος 18 να βρείτε το k.



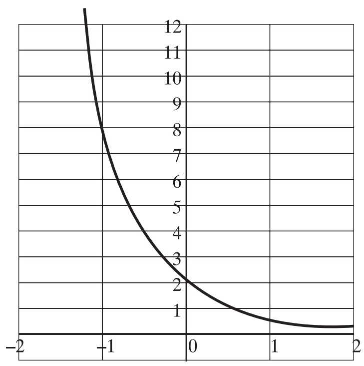
Σχ.18

β) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = 8 \cdot \alpha^{x}$ είναι η καμπύλη του σχήματος 19 να βρείτε το α.



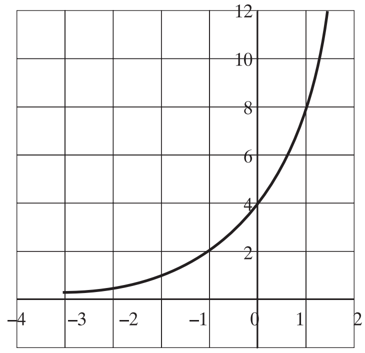
Σχ. 19

γ) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο f (x) = $2\cdot\alpha^{-x}$ είναι η καμπύλη του σχήματος 20 να βρείτε το α.



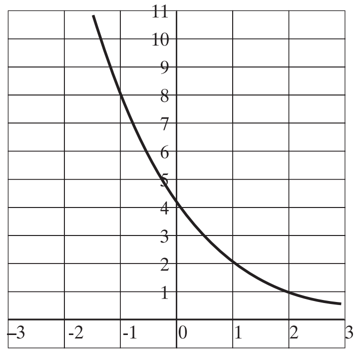
Σχ. 20

δ) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο f (x) = $k\alpha^{x}$ είναι η καμπύλη του σχήματος 21 να βρείτε τα k, α.



Σχ. 21

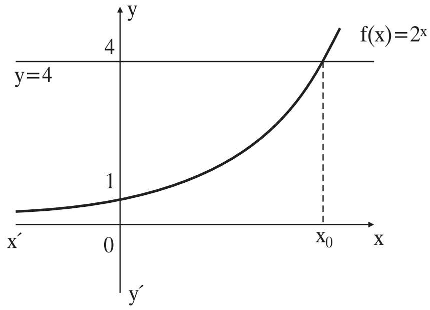
ε) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο f (x) = $k\cdot\alpha^{x}$ είναι η καμπύλη του σχήματος 22 να βρείτε τα k, α.



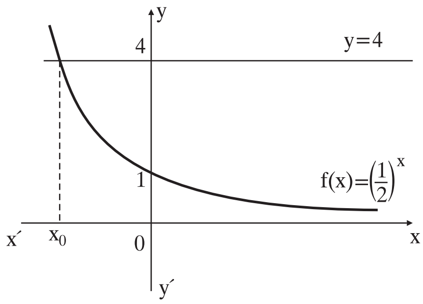
Σχ. 22

17. ***** Να βρείτε το σημείο x_o σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

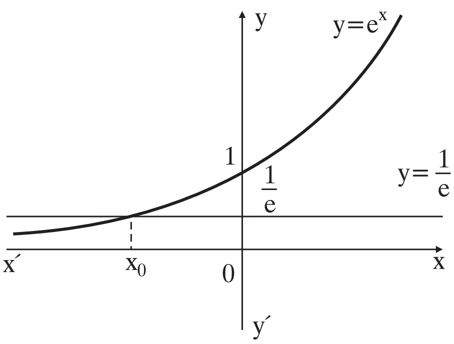
i)



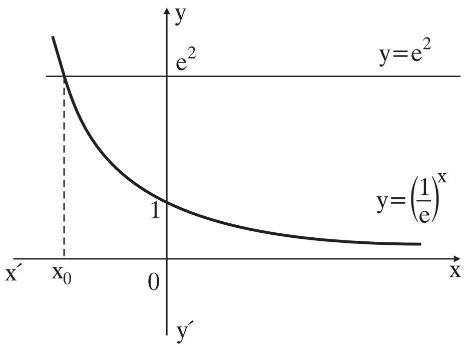
ii)



iii)



iv)



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Κεφάλαιο 4ο: ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου "Σωστό-Λάθος"

1.		2.		3.		4.	
i)	Σ	i)	Λ	i)	Σ	i)	Σ
ii)	Λ	ii)	Λ	ii)	Σ	ii)	Σ
iii)	Λ	iii)	Λ	iii)	Σ	iii)	Λ
iv)	Λ	iv)	Σ	iv)	Σ	iv)	Σ
v)	Σ	v)	Σ	v)	Σ	v)	Σ
vi)	Σ					vi)	Λ
vii)	Λ						
viii)	Σ						
ix)	Σ						
x)	Λ						

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Γ	11. Δ	21. Ε	31. Α
2. Β	12. Α	22. Δ	32. Γ
3. Δ	13. Δ	23. Δ	33. Ε
4. Δ	14. α) Ε β) Ε	24. Β	34. Β
5. Ε	15. Δ	25. Ε	35. Δ
6. Α	16. Β	26. Β	36. Γ
7. Β	17. Ε	27. Γ	37. Γ
8. Γ	18. Β	28. Α	38. Β
9. Α	19. Β	29. Ε	
10. Α	20. Γ	30. Δ	

Απαντήσεις στις ερωτήσεις διάταξης

1. Β < Δ < Α < Ε <Γ
2. Α < Ε < Γ <Δ < Β
3. **α)** αν x > 0: Γ > Ε > Β > Δ > Α
   β) αν x = 0: Α = Β = Γ = Δ = Ε
   γ) αν x < 0: Α > Δ > Β > Ε > Γ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

C_1	C_2	C_3
f_5	f_2	f_1

2.

C_1	C_2	C_3
f_4	f_1	f_3

Απαντήσεις στις ερωτήσεις συμπλήρωσης

1.

C_1	C_2	C_3	C_4
$f_1(x) = 2^{-x}$	$f_2(x) = 2^{x}$	$f_3(x) = -2^{-x}$	$f_4(x) = -2^{x}$

Απαντήσεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. i) $x = -2$ ii) $x = -3$ iii) $x = -5$ iv) $x = 3$ v) $x = -4$

2. i) $x = 2$ ή $x = 3$ ii) $x = -3$ ή $x = 3$ ή $x = 2$
iii) $x = 1$ iv) $x = 1$ v) $x = 1$ vi) $x = 2$

3. i) Θέτουμε όπου $\sqrt{2^x} = y > 0$, οπότε $x = 0$ ή $x = 4$
ii) Θέτουμε όπου $2^x = y > 0$, οπότε $x = \frac{1}{2}$
iii) Θέτουμε όπου $3^x = y > 0$, οπότε $x = -1$ ή $x = 2$
iv) $x = 4$
v) $x = \frac{3}{2}$

4. i) Διακρίνουμε περιπτώσεις: α) αν $x^2 - 5x + 5 = 1$ τότε $x = 1$ ή $x = 4$
β) αν $x^2 - 5x + 5 = -1$ και $(x + 2)$ άρτιος τότε $x =$
2
γ) αν $x + 2 = 0$ τότε $x = -2$
ii) Θέτουμε $e^x = y > 0$: $x = 0$ ή $x = 1$

5. i) Λύνουμε την εξίσωση: $ημ2x = -\frac{1}{2}$, οπότε $x = kπ - \frac{π}{12}$ ή $x = kπ + \frac{7π}{12}$
ii) Λύνουμε την εξίσωση: $ημ2x - συνx = 2\left(1 - 2ημ^2\frac{x}{2}\right)$, οπότε $x = 2kπ \pm \frac{π}{2}$
iii) Λύνουμε την εξίσωση: $ημx + 2ημxσυνx = ημ3x$, οπότε $x = kπ$ ή $x = \frac{2}{3}kπ$

6. i) Λύνουμε την ανίσωση: $x^2 - 7x + 6 < 0$, οπότε $1 < x < 6$

ii) Λύνουμε την ανίσωση: $x^2 - 2x > x + \frac{5}{2}$, οπότε $x < -1$ ή $x > 5$

iii) Λύνουμε την ανίσωση: $5x - x^2 - 1 > 3$, οπότε $1 < x < 4$

iv) Θέτουμε όπου $2^x = y > 0$ και λύνουμε την ανίσωση $y^2 - 6y + 8 < 0$, οπότε $1 < x < 2$

7. i) $(x,y) = (1,1)$ ii) $(x,y) = (3,5)$ ή $(2,6)$

iii) $(x,y) = (5,-2)$ iv) $(x,y) = (2,1)$

8. ii) **Υπόδειξη:** Παρατηρήστε ότι $f(-x) = g(x)$

9. $f(x + y) = \frac{1}{2}(\alpha^{x+y} + \alpha^{-x-y})$

$f(x) \cdot f(y) + g(x) \cdot g(y) = \frac{1}{4}(\alpha^x + \alpha^{-x})(\alpha^y + \alpha^{-y}) + \frac{1}{4}(\alpha^x - \alpha^{-x})(\alpha^y - \alpha^{-y}) =$

$\frac{1}{4}(\alpha^{x+y} + \alpha^{x-y} + \alpha^{-x+y} + \alpha^{-x-y} + \alpha^{x+y} - \alpha^{x-y} - \alpha^{-x+y} + \alpha^{-x-y}) =$

$\frac{1}{4}(2\alpha^{x+y} + 2\alpha^{-x-y}) = \frac{1}{2}(\alpha^{x+y} + \alpha^{-x-y})$, άρα $f(x + y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$

10. i) Πρέπει $\frac{1-\alpha}{\alpha-5} > 1$, οπότε $3 < \alpha < 5$

ii) Πρέπει $0 < 1 - \frac{5}{\alpha} < 1$, οπότε $\alpha > 5$

11. α) Πρέπει $1 - k^2 > 0$, οπότε $-1 < k < 1$

β) Πρέπει $1 - k^2 > 1$, που είναι αδύνατη

γ) Πρέπει $f(1) = \frac{1}{2}$, οπότε $k = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

δ) Πρέπει $f(2) = 1$, οπότε $k = 0$

12. α) $\Theta(0) = 40^{o}C$

β) Λύνουμε την εξίσωση $\Theta(t) = 36{,}5$, άρα $t = 3$

γ) $\Theta(4) = 36{,}25^{o}C$

13. i) $\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{f(x+2)}{f(x+1)} = \frac{f(x+7)}{f(x+6)} = \alpha$, ii) $\frac{f(x+3)}{f(x)} = \frac{f(x+6)}{f(x+3)} = \frac{f(x+16)}{f(x+13)} = \alpha^3$

iii) $\frac{f(x+\lambda)}{f(x)} = \frac{f(x+\beta+\lambda)}{f(x+\beta)} = \alpha^{\lambda}$, iv) η C΄

14. Ισχύει $Q(0) = 5$, $Q(10) = 2{,}5$, οπότε βρίσκουμε $e^{-k10} = \frac{1}{2}$,

άρα $Q(40) = 312{,}5$gr

15. α) Ισχύει ότι $P(2) = 400$ και $P(4) = 3200$, οπότε $k = \frac{3}{2}$

β) $P_0 = 50$

γ) Λύνουμε την $P(t) = 100$, οπότε $t = 40$ min

16. α) $f(0) = 2 \Leftrightarrow k = 2$

β) $f(1) = 4 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$

γ) $f(-1) = 8 \Leftrightarrow \alpha = 4$

δ) $f(0) = 4 \Leftrightarrow k = 4$ και $f(1) = 8 \Leftrightarrow \alpha = 2$

ε) $f(0) = 4 \Leftrightarrow k = 4$ και $f(2) = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$

17. i) Ισχύει ότι $2^{x_0} = 4 \Leftrightarrow x = 2$

ii) Ισχύει ότι $\left(\frac{1}{2}\right)^{x_0} = 4 \Leftrightarrow x_0 = -2$

iii) Ισχύει $e^{x_0} = \frac{1}{e} \Leftrightarrow x_0 = -1$

iv) Ισχύει $\left(\frac{1}{e}\right)^{x_0} = e^2 \Leftrightarrow x_0 = -2$

ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Ερωτήσεις του τύπου "Σωστό - Λάθος"

1. * Αν $0 < \alpha \neq 1$ και $\theta > 0$ ισχύει η ισοδυναμία.
$\log_\alpha \theta = x \Leftrightarrow \alpha^x = \theta$. **Σ** **Λ**

2. * Αν $0 < \alpha \neq 1$ ισχύει ότι $\log_\alpha \alpha^x = \alpha$ **Σ** **Λ**

3. * Αν $0 < \alpha \neq 1$ ισχύει ότι $\alpha^{\log_\alpha \theta} = \theta$ **Σ** **Λ**

4. * Αν $0 < \alpha \neq 1$ ισχύει ότι $\log_\alpha 1 = 1$ **Σ** **Λ**

5. * Αν $0 < \alpha \neq 1$ ισχύει ότι $\log_\alpha \alpha = 1$ **Σ** **Λ**

6. * Αν $\theta > 0$ ισχύει ότι $\log(10\theta) = 1 + \log\theta$ **Σ** **Λ**

7. * Αν $\theta > 0$ και $\theta \neq 10$ ισχύει ότι $\log\left(\frac{\theta}{10}\right) = 1 - \log\theta$ **Σ** **Λ**

8. * Αν $\theta > 0$ και $\theta \neq 10$ ισχύει ότι $\log\theta^{10} = \theta$ **Σ** **Λ**

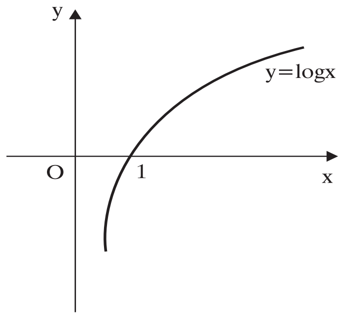
9. * Ισχύει ότι $\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2}$ **Σ** **Λ**

10. * Ισχύει ότι $\ln 27 = \left(e^3\right)^9$ **Σ** **Λ**

11. * Στο σχήμα 17 φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \log x$$

Να χαρακτηρίσετε ως σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις.



Σχ. 17

i) Η f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$. **Σ** **Λ**

ii) Η f έχει σύνολο τιμών το R **Σ** **Λ**

iii) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R **Σ** **Λ**

iv) Η f έχει άξονα συμμετρίας τον x΄x. Σ Λ

v) Η f έχει ασύμπτωτη του αρνητικού ημιάξονα των y΄y Σ Λ

vi) Η γραφική παράσταση της f είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της $g(x)=10^x$ ως προς την ευθεία y = x. Σ Λ

vii) Ισχύει ότι $f(2)<f(3)$ Σ Λ

viii) Το σημείο (1,0) ανήκει στην γραφική παράσταση της f. Σ Λ

ix) Το σημείο (0,1) ανήκει στην γραφική παράσταση της f. Σ Λ

x) Το σημείο (10,1) ανήκει στην γραφική παράσταση της f. Σ Λ

12. * Ισχύει ότι:

i) $\log x > \ln e$, για κάθε $x > 0$ Σ Λ

ii) $\log x^{-2} < \ln e^{-2}$ για κάθε $x > 0$ Σ Λ

iii) $\log 10^2 = 2$ Σ Λ

iv) $\ln e^3 = 3$ Σ Λ

v) $\log\frac{10}{e} = 1 - \log e$ Σ Λ

13. * **I)** Αν $x < y$ τότε $\log x < \log y$ Σ Λ

ii) Αν $x < y$ τότε $\ln x > \ln y$ Σ Λ

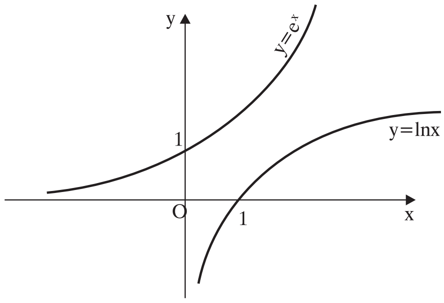
iii) Αν $x < y$ τότε $\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} y$ Σ Λ

iv) Αν $x < y$ τότε $\log_3 x > \log_3 y$ Σ Λ

14. * Στο σχήμα 18 φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων με τύπους

$f(x) = \ln x$ και $g(x) = e^x$.

Να χαρακτηρίσετε σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:



Σχ. 18

i) Οι γραφικές παραστάσεις των f και g είναι συμμετρικές ως την ευθεία y = x. **Σ** **Λ**

ii) Οι γραφικές παραστάσεις των f και g δεν τέμνονται. **Σ** **Λ**

iii) Οι γραφική παράσταση της f τέμνει τον x΄x στο (1,0). **Σ** **Λ**

iv) Η γραφική παράσταση της g τέμνει τον y΄y στο (0,1). **Σ** **Λ**

v) Ισχύει ότι $f(2) < g(2)$ **Σ** **Λ**

vi) Ισχύει ότι $f\left(\frac{1}{2}\right) < g\left(\frac{1}{2}\right)$ **Σ** **Λ**

vii) Η f και η g είναι γνησίως αύξουσες συναρτήσεις στα πεδία ορισμού τους. **Σ** **Λ**

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. * Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης με τύπο $f(x) = \log_2 x$ (Σχ.1) είναι

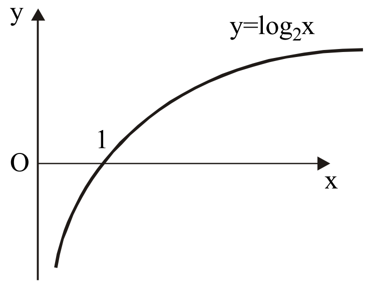
Α. το διάστημα $[0,+\infty)$

Β. το διάστημα $(0,+\infty)$

Γ. το σύνολο R

Δ. το σύνολο R*

Ε. το σύνολο R -{1}



Σχ. 1

2. * Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης με τύπο $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ (Σχ.2) είναι

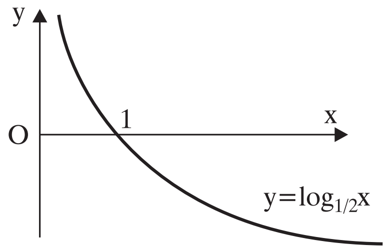
Α. το διάστημα $(0,+\infty)$

Β. το διάστημα $[0,+\infty)$

Γ. το σύνολο R

Δ. το σύνολο R*

Ε. το σύνολο R-{1}



Σχ.2

3. * Το πεδίο ορισμού της λογαριθμικής συνάρτησης με τύπο $f(x) = \log_\alpha x$ με $0 < \alpha \neq 1$ είναι

Α. Το διάστημα $[0,+\infty)$ **Β.** Το σύνολο R

Γ. Το διάστημα $(0,+\infty)$ **Δ.** Το σύνολο R* **Ε.** Το σύνολο R-{1}

4. * Το σύνολο τιμών της συνάρτησης με τύπο $f(x) = \log_3 x$ (Σχ.3) είναι

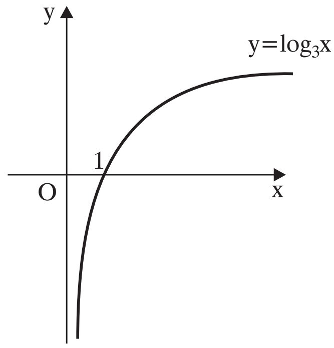
Α. το διάστημα $[0,+\infty)$

Β. το διάστημα $(-\infty,0)$

Γ. το διάστημα $(0,+\infty)$

Δ. το διάστημα $(-\infty,0)$

Ε. το σύνολο R



Σχ. 3

5. * Το σύνολο τιμών της συνάρτησης με τύπο $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ (Σχ.4) είναι

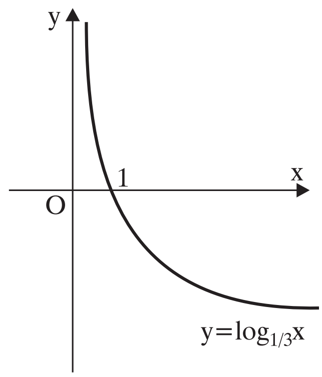
Α. το διάστημα $[0,+\infty)$

Β. το διάστημα $(-\infty,0)$

Γ. το διάστημα $(0,+\infty)$

Δ. το σύνολο R

Ε. το διάστημα $(-\infty,0)$



Σχ. 4

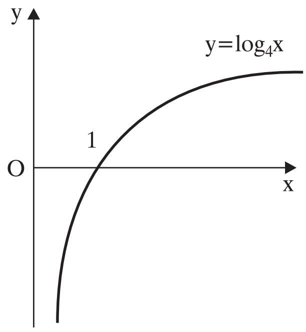
6. * Το σύνολο τιμών της λογαριθμικής συνάρτησης με τύπο $f(x) = \log_\alpha x$ με $0 < \alpha \neq 1$ είναι

Α. Το διάστημα $[0,+\infty)$ **Β.** Το σύνολο R **Γ.** Το διάστημα $(0,+\infty)$

Δ. Το διάστημα $(-\infty,0)$ **Ε.** Το διάστημα $(-\infty,0]$

7. * Η γραφική παράσταση της λογαριθμικής συνάρτησης με τύπο $f(x) = \log_4 x$ (Σχ.5) τέμνει

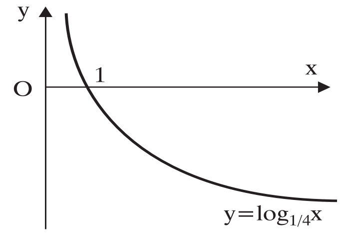
Α. μόνο τον άξονα y΄y
Β. τον άξονα x΄x και τον άξονα y΄y
Γ. μόνο τον άξονα x΄x στο σημείο (1,0)
Δ. τον άξονα x΄x σε δύο σημεία
Ε. τίποτα από τα προηγούμενα



Σχ. 5

8. * Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$ (Σχ.6) τέμνει

Α. μόνο τον άξονα y΄y
Β. τον άξονα x΄x και τον άξονα y΄y
Γ. μόνο τον άξονα x΄x σε δύο σημεία
Δ. τον άξονα x΄x στο σημείο (1,0)
Ε. τίποτα από τα παραπάνω



Σχ. 6

9. * Η λογαριθμική συνάρτηση με τύπο $f(x) = \log_\alpha x$ με $0 < \alpha \neq 1$ έχει γραφική παράσταση που τέμνει

Α. μόνο τον άξονα y΄y **Β.** τον άξονα x΄x στο σημείο (1,0)
Γ. τον άξονα x΄x και τον άξονα y΄y **Δ.** τον άξονα x΄x σε δύο σημεία
Ε. τίποτα από τα παραπάνω

10. * Η λογαριθμική συνάρτηση με τύπο f (x) = $\log_α x$ με ο < α < 1 είναι πάντοτε

Α. γνησίως αύξουσα **Β.** σταθερή **Γ.** άρτια

Δ. γνησίως φθίνουσα **Ε.** τίποτα από τα προηγούμενα

11. * Η λογαριθμική συνάρτηση με τύπο f (x) = $\log_α x$ με α > 1 είναι πάντοτε

Α. γνησίως αύξουσα **Β.** περιττή **Γ.** σταθερή

Δ. γνησίως φθίνουσα **Ε.** τίποτα από τα προηγούμενα

12. * Η συνάρτηση με τύπο f (x) = $\log_{\frac{1}{10}} x$ (Σχ.7) είναι

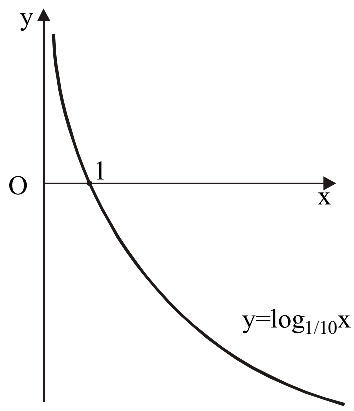
Α. γνησίως αύξουσα

Β. άρτια

Γ. περιττή

Δ. γνησίως φθίνουσα

Ε. τίποτα από τα προηγούμενα



Σχ. 7

13. * Η συνάρτηση με τύπο f (x) = log x (Σχ.8) είναι

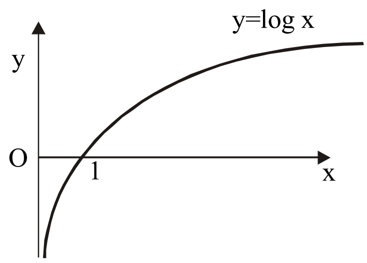
Α. γνησίως αύξουσα

Β. περιοδική

Γ. σταθερή

Δ. γνησίως φθίνουσα

Ε. τίποτα από τα παραπάνω



Σχ. 8

14. * Η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \ln x$ (Σχ.9) είναι

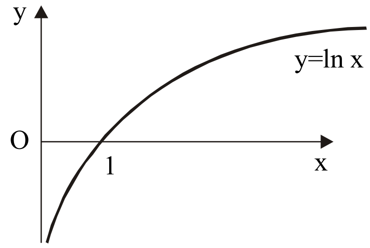
Α. γνησίως αύξουσα

Β. άρτια

Γ. περιττή

Δ. γνησίως φθίνουσα

Ε. τίποτα από τα παραπάνω



Σχ. 9

15. ** Για την συνάρτηση με τύπο $f(x) = |\ln x|$ (Σχ.10) **δεν** ισχύει ότι

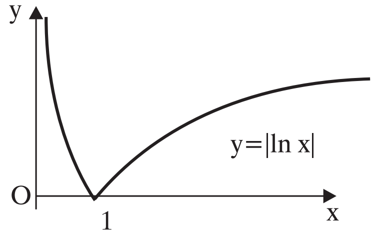
Α. έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0,+\infty)$

Β. έχει σύνολο τιμών το διάστημα $[0,+\infty)$

Γ. έχει ελάχιστο το 0 για $x=1$

Δ. είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

Ε. τέμνει τον άξονα y΄y.



Σχ. 10

16. * Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = 2^x$ είναι συμμετρική με την γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $g(x)= \log_2 x$ (Σχ. 11) ως προς

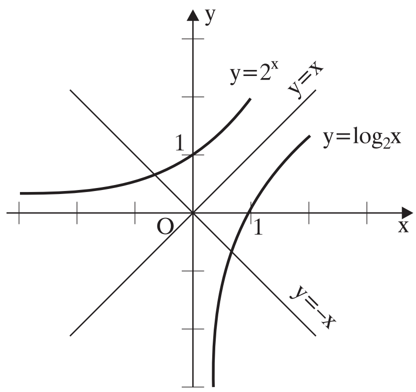
Α. τον άξονα y΄y

Β. το σημείο (0,0)

Γ. την ευθεία $y = x$

Δ. την ευθεία $y= -x$

Ε. τον άξονα x΄x.



Σχ. 11

17. * Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο f (x) = $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ είναι συμμετρική με την γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο g (x) = $\log_{\frac{1}{2}}$ x (Σχ.12) ως προς

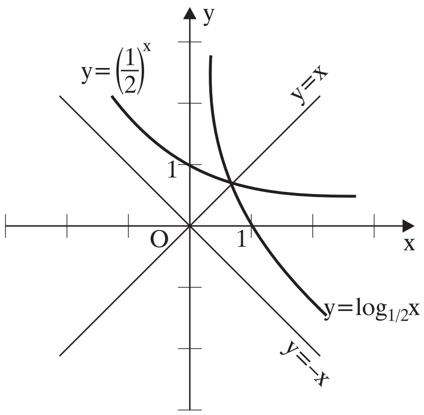
Α. τον άξονα y΄y

Β. το σημείο (0,0)

Γ. την ευθεία y = - x

Δ. την ευθεία y = x

Ε. τον άξονα x΄x.



Σχ. 12

18. * Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο f (x) = e^x είναι συμμετρική με την γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο g (x)= lnx (Σχ.13) ως προς

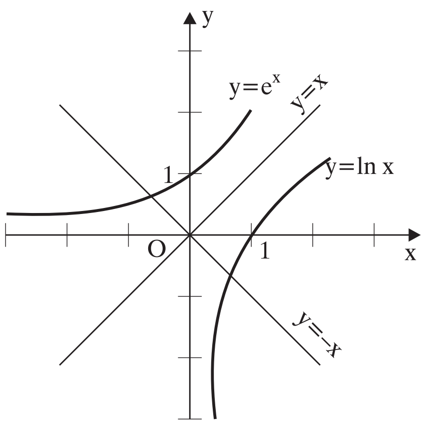
Α. τον άξονα y΄y

Β. το σημείο (0, 0)

Γ. την ευθεία y = x

Δ. την ευθεία y = -x

Ε. τον άξονα x΄x.



Σχ. 13

19. * Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = α^x$ είναι συμμετρική με την γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $g(x)= \log_α x$ όταν $0<α\neq1$ ως προς

Α. τον άξονα $y'y$ **Β.** την ευθεία $y = x$ **Γ.** το σημείο (0,0)

Δ. την ευθεία $y = -x$ **Ε.** τον άξονα $x'x$

20. * Η ισοδυναμία $\log_α x = y \Leftrightarrow x = α^y$ ισχύει πάντοτε με τις προϋποθέσεις

Α. $x \in R$ και $α > 0$ **Β.** $x \in [0,+\infty)$ και $0 \leq α \neq 1$

Γ. $x \in (0,+\infty)$ και $ο < α \neq 1$ **Δ.** $x \in R$ και $α \neq 1$

Ε. $x \geq 0$ και $α \geq 0$

21. * Αν $\log_x 32 = 5$ τότε το x είναι ίσο με

Α. $\frac{1}{2}$ **Β.** 2 **Γ.** -2 **Δ.**1 **Ε.** 10

22. * Αν $\log_3 x = 4$ τότε το x είναι ίσο με

Α. 7 **Β.** 12 **Γ.** 64 **Δ.** 81 **Ε:** 9

23. * Αν $\log_2 64 = x$ τότε το x είναι ίσο με

Α. 32 **Β.** 16 **Γ.** 128 **Δ.** 12 **Ε.** 6

24.* Η παράσταση $3^{\log_3 5}$ είναι ίση με

Α. 1 **Β.** log5 **Γ.** 5 **Δ.** log3 **Ε.** 0

25.* Η παράσταση $\log_α α$ με $0<α\neq1$ είναι ίση με

Α. $α^2$ **Β.** 1 **Γ.** α **Δ.** 0 **Ε.** 2α

26. * Η παράσταση $\log_α 1$ με $0 < α \neq 1$ είναι ίση με

Α. $α^2$ **Β.** 1 **Γ.** α **Δ.** 0 **Ε.** 2α

27. * Η παράσταση $\log 100^2$ είναι ίση με

Α. 4 **Β.** 2 **Γ.** 10 **Δ.** 100 **Ε.** 10.000

28. * Η παράσταση log2 + log7 είναι ίση με

Α. log9 **Β.** log14 **Γ.** $\log\frac{7}{2}$ **Δ.** log5 **Ε.** 2log7

29. * Η παράσταση log12 - log3 είναι ίση με

Α. log9 **Β.** log15 **Γ.** log36 **Δ.**12log3 **Ε.** log4

30. * Η παράσταση $\log 2^3$ είναι ίση με

Α. log6 **Β.** log5 **Γ.** 2log3 **Δ.** 3log2 **Ε.** τίποτα από τα προηγούμενα

31. * Η παράσταση $\frac{\log 2}{\log 3}$ είναι ίση με

Α. $\log\frac{2}{3}$ **Β.** $\log_2 3$ **Γ.** $\log_3 2$ **Δ.** $\log\frac{3}{2}$ **Ε.** τίποτα από τα προηγούμενα

32. * Η παράσταση $\frac{1}{2}\log 25+\frac{1}{3}\log 8$ είναι ίση με

Α. $\frac{1}{6}$ **Β.** $\frac{1}{6}\log 200$ **Γ.** $\frac{5}{6}\log 34$ **Δ.** 1 **Ε.** log200

33. * Από τις παρακάτω σχέσεις σωστή είναι η

Α. $\log_5 2<\log_5\frac{1}{2}$ **Β.** $\log_5 2\leq\log_5\frac{1}{2}$

Γ. $\log_5 2>\log_5\frac{1}{2}$ **Δ.** $\log_5 2=\log_5\frac{1}{2}$ **Ε.** τίποτα από τα προηγούμενα

34. * Από τις παρακάτω σχέσεις σωστή είναι η

Α. $\log_{\frac{1}{3}}5 < \log_{\frac{1}{3}}7$ **Β.** $\log_{\frac{1}{3}}5 \leq \log_{\frac{1}{3}}7$ **Γ.** $\log_{\frac{1}{3}}5 = \log_{\frac{1}{3}}7$

Δ. $\log_{\frac{1}{3}}5 > \log_{\frac{1}{3}}7$ **Ε.** τίποτα από τα προηγούμενα

35. * Ο $\log(4-x^2)$ ορίζεται αν

Α. $x > 2$ **Β.** $-2 < x < 2$ **Γ.** $x < -2$ **Δ.** $x = 2$ **Ε.** $x = -2$

36. * Ο $\log|x-1|$ **δεν** ορίζεται αν

Α. $x > 1$ **Β.** $x \neq 1$ **Γ.** $-1 < x < 1$ **Δ.** $x < -1$ **Ε.** $x = 1$

37. * Η συνάρτηση $f(x) = \log(x-6) + \log(7-x)$ ορίζεται αν

Α. $x = 6$ **Β.** $x < 6$ **Γ.** $x > 7$ **Δ.** $x = 7$ **Ε.** $6 < x < 7$

38. * Αν $\log[\log(x-2)] = 0$ τότε το x είναι ίσο με

Α. 12 **Β.** 2 **Γ.** 3 **Δ.** 4 **Ε.** 10

39. ** Αν $\log\theta = 1{,}62$ τότε ο θ ανήκει στο διάστημα

Α. (0,1) **Β.** (1,2) **Γ.** (2,5) **Δ.** (5,10) **Ε.** (10,100)

40. ** Αν ισχύει $\log(\eta\mu x) = 0$ τότε είναι

Α. $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ **Β.** $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4}$ **Γ.** $x = 2\kappa\pi$

Δ. $x = 2\kappa\pi + \pi$ **Ε.** $x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}$

41. ** Αν ισχύει $\log(\varepsilon\varphi x) = 0$ τότε είναι

Α. $x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$ **Β.** $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ **Γ.** $x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$

Δ. $x = k\pi$ **Ε.** $x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}$

42. * Αν log50 - log2 = logx τότε το x είναι ίσο με

Α. 100 **Β.** 52 **Γ.** 25 **Δ.** 48 **Ε.** 12,5

43. * Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων με τύπους $f(x) = \ln x$ και $y = \frac{1}{2}$ τέμνονται στο σημείο $A(x_o, \frac{1}{2})$ (Σχ.14). Τότε το x_o είναι ίσο με

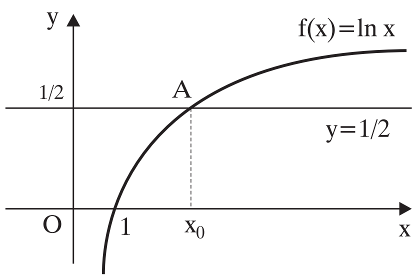
Α. e

Β. 1

Γ. $\frac{1}{2}$

Δ. $\sqrt{e}$

Ε. $\frac{3}{2}$

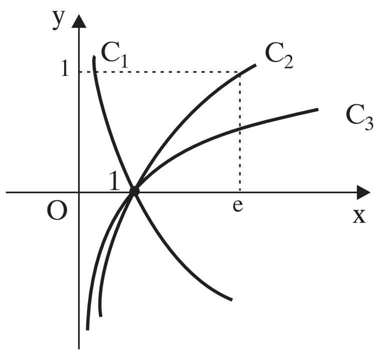


Σχ. 14

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. ***** Στη στήλη Α του πίνακα (Ι) υπάρχουν οι γραφικές παραστάσεις κάποιων από τις συναρτήσεις που ο τύπος τους αναγράφεται στη στήλη Β.

Πίνακας (Ι)

Στήλη Α	**Στήλη Β**
 Σχ.15	$f_1(x) = \log x$ $f_2(x) = \ln x$ $f_3(x) = \log_2 x + 1$ $f_4(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ $f_5(x) = \log_{\frac{1}{4}} x - 1$

Να συμπληρώσετε τον πίνακα (ΙΙ) ώστε σε κάθε γραφική παράσταση της στήλης Α να αντιστοιχεί ο τύπος της συνάρτησης που βρίσκεται στη στήλη Β.

Πίνακας (ΙΙ)

C_1	C_2	C_3

2. * Κάθε ισότητα της στήλης Α του πίνακα (Ι) ισοδυναμεί με μια ισότητα της στήλης Β.

Πίνακας (Ι)

Στήλη Α	**Στήλη Β**
	Α. $\alpha^8 = 3$
1. $\log_\alpha 3 = 8$	**Β.** $\omega = e^x$
2. $\log_8 \alpha = 3$	**Γ.** $x^\omega = e$
3. $\ln x = 1+\omega$	**Δ.** $\alpha = 8^3$
4. $\omega \ln x = 1$	**Ε.** $x = e^{\omega+1}$
	ΣΤ. $\alpha = 3^8$

Να συμπληρώσετε τον πίνακα (ΙΙ) ώστε σε κάθε ισότητα της στήλης Α να αντιστοιχεί η ισοδύναμή της ισότητα που βρίσκεται στη στήλη Β.

Πίνακας (ΙΙ)

1	**2**	**3**	**4**

3. * Στη στήλη Α του πίνακα (Ι) υπάρχουν λογαριθμικές παραστάσεις και στη στήλη Β διάφορα αναπτύγματα.

Πίνακας (Ι)

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. $\log\left(\frac{x^2}{y^3}\right)$	**Α.** 3logx - 2logy
	Β. lnx + 2lny
2. $\ln(xy^2)$	**Γ.** 2logx - 3logy
	Δ. ln10 + lnx + lny
3. ln(10xy)	**Ε.** 1 + lnx + lny

Να συμπληρώσετε τον πίνακα (ΙΙ) ώστε σε κάθε λογαριθμική παράσταση της στήλης Α να αντιστοιχεί το ανάπτυγμά της που βρίσκεται στη στήλη Β.

Πίνακας (ΙΙ)

1	**2**	**3**

4. * Στη στήλη Α του πίνακα (Ι) υπάρχουν αναπτύγματα και στη στήλη Β κάποιες παραστάσεις.

Πίνακας (Ι)

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $\log 4 - \log x + 2\log y$	**Α.** $\log\left(\frac{4y^2}{x}\right)$
	Β. $\ln\left(\frac{xe^2}{y^2}\right)$
2. $\log\alpha + 2\log\beta - \log\gamma$	**Γ.** $\ln\left(\frac{2x}{y^2}\right)$
3. $\ln x - 2\ln y + 2$	**Δ.** $\ln\left[(x+e)(e-x)\right]$
	Ε. $\log\left(\frac{\alpha\beta^2}{\gamma}\right)$

Να συμπληρώσετε τον πίνακα (ΙΙ) ώστε σε κάθε ανάπτυγμα της στήλης Α να αντιστοιχεί η ισοδύναμή του παράσταση που βρίσκεται στη στήλη Β.

Πίνακας (ΙΙ)

1	2	3

Ερωτήσεις διάταξης

Να τοποθετήσετε σε μια σειρά από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

1. * $A = \log 0{,}5$ $\quad B = \log\sqrt{2}$ $\quad \Gamma = \log\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \Delta = 0$ $\quad E = 1$

2. * $A = \log_2 \frac{1}{2}$ $\quad B = \log_2 \frac{1}{3}$ $\quad \Gamma = \log_2 \sqrt{5}$ $\quad \Delta = 0$ $\quad E = 1$

3. * $A = \log_{0.5} \frac{1}{4}$ $\quad B = \log_{0.5} 4$ $\quad \Gamma = \log_{0.5} 10$ $\quad \Delta = 0$ $\quad E = 1$

Να τοποθετήσετε κατά σειρά μεγέθους τις αριθμητικές τιμές των παραστάσεων:

4. * $A = \log_{0.5} x$ $\quad B = \log_2 x$ $\quad \Gamma = \log_3 x$ $\quad \Delta = 0$

α) Αν $0 < x < 1$

β) Αν $x > 1$

Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. * Να συμπληρώσετε τα κενά στις ισότητες που ακολουθούν:

i) $\log_5 \cdots = 2$

ii) $\log_5 25 = \cdots$

iii) $\log_2 \cdots = -3$

iv) $\log_{\frac{1}{2}} \cdots = -3$

v) $\log_\alpha (\alpha^\rho) = \cdots$, $\rho \in R$

vi) $\log_5 \sqrt{5} = \cdots$

vii) $\log_6 \frac{1}{6} = \cdots$

viii) $\log_6 \cdots = 2$

ix) $\ln \cdots = 2$

x) $\ln \cdots = -1$

2. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

i) $\log_\alpha 1 = \cdots$

ii) $\log_\alpha \alpha = \cdots$

iii) $\log_\alpha \sqrt{\alpha} = \cdots$

iv) $\log_{\dots} \alpha = 1$

v) $\log_\alpha \frac{1}{\alpha} = \cdots$

vi) $\log_{\dots} \sqrt{k} = \frac{1}{2}$

vii) $\log_\alpha \cdots = \frac{1}{3}$

viii) $\log_{\dots} \alpha^2 = 1$

ix) $\log_{\dots} \alpha^3 = 3$

x) $\log_\alpha \cdots = 0$

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. * Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\log(1+x)=\log(1-x)$ **ii)** $\log(1+x)=1+\log(1-x)$

iii) $2\log(2x-1)-\log(3x-2x^2)=\log(4x-3)-\log x$ **iv)** $\ln\frac{x}{2}=\frac{\ln x}{2}$

2. ** Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x(\log 10-\log 5)=\log(4^x-12)$ **ii)** $\log_2(4^x+4)=x+\log_2(2^{x+1}-3)$

iii) $\frac{\log_2(9-2^x)}{3-x}=1$

3. ** Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\log_{16}x+\log_4 x+\log_2 x=7$ **ii)** $\log_2(\log_2 x)=\log_4(\log_4 x)$

iii) $\log_4[\log_3(\log_2 x)]=0$

4. ** **α)** Να υπολογίσετε τον αριθμό $100^{\log\sqrt{3}}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $3^{2\log x}-2\cdot 3^{\log x}-100^{\log\sqrt{3}}=0$.

5. *** Αν σε μία αριθμητική πρόοδο (α_ν) ο πρώτος όρος είναι $\alpha_1=\log_3 3$ και ο δεύτερος όρος της είναι $\alpha_2=\log_3 81$.

α) Να βρείτε την διαφορά ω της αριθμητικής προόδου.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $3^{\log_\omega x^3}-9\cdot 3^{\log_\omega x^2}-9\cdot 3^{\log_\omega x}+81=0$.

6. ** **i)** Να αποδείξετε ότι: $3^{\log x} = x^{\log 3}$

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $3^{\log x} = 54 - x^{\log 3}$

7. ** **i)** Να αποδείξετε ότι: $x^{\log_5 2} = 2^{\log_5 x}$ αν $0 < x \neq 1$

ii) Να λύσετε την εξίσωση $3x^{\log_5 2} + 2^{\log_5 x} = 64$

iii) Να αποδείξετε ότι ισχύει γενικά $\alpha^{\log_\beta \gamma} = \gamma^{\log_\beta \alpha}$ με $(0 < \alpha, \beta, \gamma \neq 1)$

8. ** **i)** Να αποδείξετε ότι $x^{\log y} = y^{\log x}$ με $x, y > 0$

ii) Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} x^{\log y} + y^{\log x} = 20 \\ \log\sqrt{x \cdot y} = 1 \end{cases}$

iii) Αν οι λύσεις του (**ii**) είναι ρίζες της εξίσωσης:

$\log[\log(x^2 + x\log\theta - 110)] = 0$ να βρείτε το $\theta \in R_+^*$

9. ** Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \log_2 \dfrac{x-2}{x(x-1)} - \log_{\sqrt{2}} 2 \cdot [\log_{\frac{1}{2}}(x-1)]$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

ii) Να δείξετε ότι $f(x) = \log_2 \dfrac{(x-2)(x-1)}{x}$

iii) Να λύσετε ως προς $\lambda \in R$ την εξίσωση: $2\lambda\, f(4) = \log_2 3^{\lambda+2} + (2 - \lambda)\log_2{}^2$

10. ** Να λύσετε την εξίσωση: $(x+1)^{\log(x+1)} = 100(x+1)$.

11. ** Να βρείτε δύο θετικούς αριθμούς που οι φυσικοί τους λογάριθμοι έχουν άθροισμα 2 και γινόμενο -8.

12. ** Να βρείτε τον θετικό αριθμό x ώστε να ισχύει:

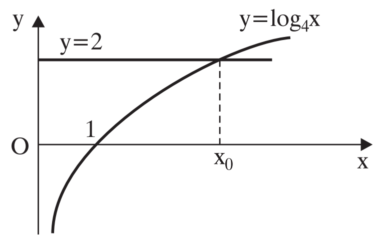
$$\log x + \log x^3 + \log x^5 + \cdots + \log x^{2\nu-1} = 2\nu^2$$

13. ** Αν σε μία γεωμετρική πρόοδο (α_ν) ισχύει $\alpha_\rho = k \cdot \alpha_1$, όπου ο α_ρ ο όρος τάξεως ρ, α ο πρώτος της όρος, και λ ο λόγος της να αποδείξετε ότι:

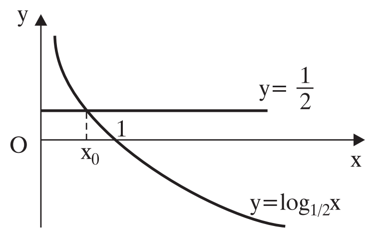
$$(\rho-1)\log\lambda = \log k$$

14. ** Να βρείτε το x_o σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

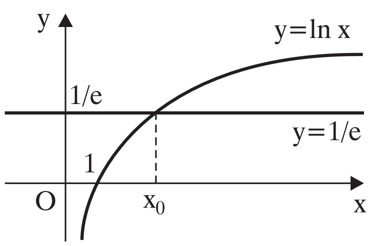
i)



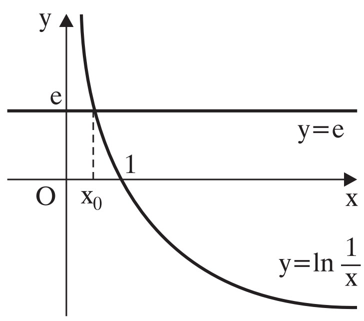
ii)



iii)

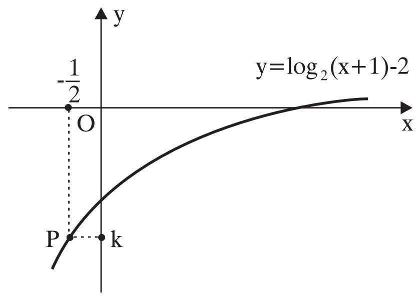


iv)



15. ** Να βρείτε: **α)** τα σημεία στα οποία τέμνει τους άξονες η γραφική παράσταση της $f(x) = \log_2(x+1) - 2$ (Σχ.16).

β) Το k ώστε το σημείο $P\left(-\frac{1}{2}, k\right)$ να ανήκει στη γραφική της παράσταση.



Σχ. 16

16. ** Να λύσετε την εξίσωση ln(συνx) = 0.

17. ** Ο θόρυβος y ενός ήχου σε dB (ντεσιμπέλ) δίνεται από τον τύπο $y = 20\log\frac{x}{20}$ όπου x η πίεση που ασκεί το ακουστικό κύμα στα μόρια του ατμοσφαιρικού αέρα μετρούμενη σε μP (μικρο Pascals, $1\mu P = 10^{-6}P$).

α) Πόση πίεση ασκεί ένα αθόρυβο κύμα στα μόρια του αέρα;

β) Ένας κεραυνός άσκησε πίεση $x = 2\cdot 10^{6,5}\mu P$ στα μόρια του ατμοσφαιρικού αέρα. Πόσο dB ήταν ο θόρυβος που προξένησε;

Δίνεται ότι: Μια ηχητική πηγή θεωρείται αθόρυβη όταν ο θόρυβός της είναι το 20dB (όσος δηλαδή ο θόρυβος του θροΐσματος των φύλλων ενός δέντρου σε ελαφρύ φύσημα του αέρα - μικρότερος θόρυβος δεν ανιχνεύεται-).

18. ** Ο θόρυβος L σε dB (ντεσιμπέλ) που προκαλεί μια ηχητική πηγή δίνεται από τον τύπο $L = 120 + 10\log(10^{-12}I)$ όπου I το μέτρο της έντασης του ήχου σε $Watt/m^2$.

α) Πόση πρέπει να είναι (το πολύ) η ένταση μια «αθόρυβης» ηλεκτρικής συσκευής;

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Είδος θορύβου	Θόρυβος σε dB	Ένταση ήχου σε Watt/m^2
Μηχανές αεροπλάνου Jet (σε απόσταση 30m)	140	
Μουσική Rock (1,5m μακριά από το ηχείο)		10^{12}
Μοτοσικλέτα (με κανονική εξάτμιση)	80	
Συνομιλία (σε ήρεμο κλίμα)		10^{6}

γ) Σ' ένα πεζοδρόμιο δουλεύουν ταυτόχρονα σε πολύ μικρή απόσταση 2 κομπρεσέρ που το καθένα ξεχωριστά προκαλεί θόρυβο 130 dB. Πόσος είναι ο συνολικός θόρυβος που προκαλεί και τα δύο μαζί;

Δίνονται: **i)** Μια ηχητική πηγή θεωρείται αθόρυβη όταν ο θόρυβος της είναι 20dB (όσος δηλαδή είναι ο θόρυβος του θροίσματος των φύλλων του δένδρου σε ελαφρό φύσημα του αέρα - μικρότερος θόρυβος δεν ανιχνεύεται-).

ii) $\log 2 \cong 0{,}30$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις «Σωστό - Λάθος»

1. Σ	**11. i) Σ**	**12. i) Λ**	**14. i) Σ**
2. Λ	**ii) Σ**	**ii) Λ**	**ii) Σ**
3. Σ	**iii) Λ**	**iii) Σ**	**iii) Σ**
4. Λ	**iv) Λ**	**iv)Σ**	**v) Σ**
5. Σ	**v) Σ**	**v) Σ**	**vi) Σ**
6. Σ	**vi) Σ**	**13. i) Σ**	**vii) Σ**
7. Λ	**vii) Σ**	**ii) Λ**	
8. Λ	**viii) Σ**	**iii) Σ**	
9. Σ	**ix) Λ**	**iv)Λ**	
10. Λ	**x) Σ**		

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Β	**10. Δ**	**19. Β**	**28. Β**	**37. Ε**
2. Α	**11. Α**	**20. Γ**	**29. Ε**	**38. Α**
3. Γ	**12. Δ**	**21. Β**	**30. Δ**	**39. Ε**
4. Ε	**13. Α**	**22. Δ**	**31. Γ**	**40. Α**
5. Δ	**14. Α**	**23. Ε**	**32. Δ**	**41. Β**
6. Β	**15. Ε**	**24. Γ**	**33. Γ**	**42. Γ**
7. Γ	**16. Γ**	**25. Β**	**34. Δ**	**43. Δ**
8. Δ	**17. Δ**	**26. Δ**	**35. Β**	
9. Β	**18. Γ**	**27. Α**	**36. Ε**	

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

C_1	C_2	C_3
f_4	f_2	f_1

2.

1	2	3	4
Α	Δ	Ε	Γ

3.

1	2	3
Γ	Β	Δ

4.

1	2	3
Α	Ε	Β

Απαντήσεις στις ερωτήσεις διάταξης

1. Α < Γ < Δ < Β < Ε

2. Β < Α < Δ <Ε < Γ

3. Γ < Β < Δ < Ε < Α

4. **i)** Αν $0 < x < 1$: Β < Γ < Δ < Α
ii) Αν $x > 1$: Α < Δ < Γ < Β

Απαντήσεις στις ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. i) 25 ii) 2 iii) $\frac{1}{8}$ iv) 8 v) ρ vi) $\frac{1}{2}$ vii) -1

viii) 36 ix) e^2 x) $\frac{1}{e}$

2. i) 0 ii) 1 iii) $\frac{1}{2}$ iv) α v) -1 vi) k

vii) $\sqrt[3]{\alpha}$ viii) α^2 ix) α x) 1

Απαντήσεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. i) Πρέπει $1 + x > 0$ και $1 - x > 0$, οπότε $x = 0$

ii) Πρέπει $1 + x > 0$ και $1 - x < 0$, οπότε $x = \frac{9}{11}$

iii) Πρέπει $2x - 1 > 0$ και $3x - 2x^2 > 0$ και $4x - 3 > 0$ και $x > 0$, οπότε

$x = 1$ ή $x = \frac{5}{6}$

iv) Πρέπει $x > 0$, οπότε $x = 4$

2. i) $x (\log 10 - \log 5) = \log (4^x - 12) \Leftrightarrow x \log \frac{10}{5} = \log (4^x - 12) \Leftrightarrow$

$\log 2^x = \log (4^x - 12) \Leftrightarrow 2^x = 4^x - 12$ θέτω $2^x = y > 0 \Leftrightarrow y^2 - y - 12 = 0$

$\Leftrightarrow y = - 3$ απορ. ή $y = 4 \Leftrightarrow 2^x = 4 \Leftrightarrow x = 2$ δεκτή, γιατί $4^2 - 12 > 0$

ii) $\log_2 (4^x + 4) = x + \log_2 (2^{x+1} - 3) \Leftrightarrow$

$\log_2 (4^x + 4) = x \log_2 2 + \log_2 (2^{x+1} - 3) \Leftrightarrow$

$\log_2 (4^x + 4) = \log_2 2^x + \log_2 (2^{x+1} - 3) \Leftrightarrow$

$\log_2 (4^x + 4) = \log_2 [2^x (2^{x+1} - 3)] \Leftrightarrow 4^x + 4 = 2^{2x} \cdot 2 - 3 \cdot 2^x$

θέτω $2^x = y > 0 \Leftrightarrow y^2 + 4 = 2y^2 - 3y \Leftrightarrow y^2 - 3y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = - 1$

απορ.

$y = 4 \Leftrightarrow 2^x = 4 \Leftrightarrow x = 2$ δεκτή, γιατί $4^2 + 4 > 0$ και $2^3 - 3 > 0$

iii) $\frac{\log_2 (9 - 2^x)}{3 - x} = 1 \overset{x \neq 3}{\Leftrightarrow} \log_2 (9 - 2^x) = 3 - x \Leftrightarrow$

$\log_2 (9 - 2^x) = (3 - x) \log_2 2 \Leftrightarrow \log_2 (9 - 2^x) = \log_2 2^{3-x} \Leftrightarrow$

$9 - 2^x = \frac{2^3}{2^x}$ θέτω $2^x = y > 0 \Leftrightarrow 9 - y = \frac{8}{y} \Leftrightarrow 9y - y^2 = 8 \Leftrightarrow$

$y^2 - 9y + 8 = 0 \Leftrightarrow y = 1$ ή $y = 8 \Leftrightarrow 2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ ή $2^x = 8 \Leftrightarrow x = 3$

η $x = 0$ δεκτή, γιατί $9 - 2^0 > 0$ και $3 - 0 \neq 0$

η $x = 3$ απορρίπτεται, γιατί $9 - 2^3 > 0$ και $3 - 3 = 0$

3. i) Πρέπει $x > 0$

$\log_{16}x + \log_4 x + \log_2 x = 7 \Leftrightarrow \dfrac{\log_2 x}{\log_2 16} + \dfrac{\log_2 x}{\log_2 4} + \log_2 x = 7$

θέτω $\log_2 x = y \Leftrightarrow \dfrac{y}{4} + \dfrac{y}{2} + y = 7 \Leftrightarrow y + 2y + 4y = 28 \Leftrightarrow y = 4 \Leftrightarrow$

$\log_2 x = 4 \Leftrightarrow x = 2^4 \Leftrightarrow x = 16$

ii) Όμοια μετατρέπουμε τους λογάριθμους με βάση το 4 σε λογάριθμους με βάση το 2, οπότε $x = \sqrt{2}$

iii) Πρέπει $x > 0$ και $\log_2 x > 0 \Leftrightarrow x > 1$ και

$\log_3(\log_2 x) > 0 \Leftrightarrow \log_2 x > 1 \Leftrightarrow x > 2$

$\log_4(\log_3(\log_2 x)) = 0 \Leftrightarrow \log_3(\log_2 x) = 1 \Leftrightarrow \log_2 x = 3 \Leftrightarrow x = 2^3 \Leftrightarrow$

$x = 8$ δεκτή

4. α) $100^{\log\sqrt{3}} = 10^{2\log\sqrt{3}} = 10^{\log 3} = 3$

β) Θέτουμε όπου $100^{\log\sqrt{3}} = 3$ και $3^{\log x} = y$, οπότε $x = 10$

5. α) $\omega = \alpha_2 - \alpha_1 = \log_3 81 - \log_3 3 \Leftrightarrow \omega = \log_3 \dfrac{81}{3} = \log_3 27 = \log_3 3^3 \Leftrightarrow \omega = 3$

β) Πρέπει $x > 0$. Θέτουμε $\omega = 3$ και $3^{\log_3 x^3} = x^3$, $3^{\log_3 x^2} = x^2$ και $3^{\log_3 x} = x$, οπότε $x = 3$ ή $x = 9$

6. i) Λογαριθμούμε και τα δύο μέλη

ii) $x = 10^3$

7. i) Λογαριθμούμε και τα δύο μέλη

ii) $x = 5^4$

iii) $\alpha^{\log_\beta \gamma} = \gamma^{\log_\beta \alpha} \Leftrightarrow \log \alpha^{\log_\beta \gamma} = \log \gamma^{\log_\beta \alpha} \Leftrightarrow \log_\beta \gamma \cdot \log \alpha = \log_\beta \alpha \cdot \log \gamma \Leftrightarrow$

$\frac{\log\gamma}{\log\beta} \cdot \log\alpha = \frac{\log\alpha}{\log\beta} \cdot \log\gamma$ ισχύει

8. i) $x^{\log y} = y^{\log x} \Leftrightarrow \log x^{\log y} = \log y^{\log x} \Leftrightarrow \log y \cdot \log x = \log x \cdot \log y$ ισχύει

ii) $\left.\begin{matrix} x^{\log y} + y^{\log x} = 20 \\ \log\sqrt{xy} = 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 2x^{\log y} = 20 \\ \frac{1}{2}\log(xy) = 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x^{\log y} = 10 \\ \log x + \log y = 2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$

$\left.\begin{matrix} \log x^{\log y} = \log 10 \\ \log x + \log y = 2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \log y \cdot \log x = 1 \\ \log x + \log y = 2 \end{matrix}\right\}$ θέτουμε $\begin{matrix} \log x = k \\ \log y = \lambda \end{matrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \kappa\lambda = 1 \\ \kappa + \lambda = 2 \end{matrix}\right\}$

οπότε οι κ, λ είναι λύσεις της εξίσωσης $\omega^2 - 2\omega + 1 = 0 \Leftrightarrow (\omega - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \omega = 1 \Leftrightarrow \kappa = \lambda = 1 \Leftrightarrow \log x = \log y = 1 \Leftrightarrow x = y = 10$

iii) $\log[\log(x^2 + x\log\theta - 110)] = 0 \Leftrightarrow \log(x^2 + x\log\theta - 110) = 1 \overset{x=10}{\Leftrightarrow}$

$\log(-10 + 10\log\theta) = 1 \Leftrightarrow -10 + 10\log\theta = 10 \Leftrightarrow 10\log\theta = 20 \Leftrightarrow$

$\log\theta = 2 \Leftrightarrow \theta = 10^2$

9. i) Πρέπει $\frac{x-2}{x(x-1)} > 0$ και $x - 1 > 0$, άρα $x > 2$, οπότε $A_f = (2, +\infty)$

ii) $f(x) = \log\frac{x-2}{x(x-1)} - 2\left(\frac{\log_2(x-1)}{\log_2\frac{1}{2}}\right) = \log\frac{x-2}{x(x-1)} + \log_2(x-1)^2 =$

$\log_2\frac{(x-2)\sqrt{(x-1)^2}}{x(x-1)} = \log_2\frac{(x-2)(x-1)}{x}$

iii) $2\lambda\, f(4) = \log_2 3^{\lambda+2} + (2 - \lambda)\log_2 2$ με $f(4) = \log_2 3$, άρα

$2\lambda\cdot\log_2 3 = (\lambda + 2)\log_2 3 + (2 - \lambda) \Leftrightarrow$

$2\lambda\cdot\log_2 3 = \lambda\cdot\log_2 3 + 2\log_2 3 + 2 - \lambda \Leftrightarrow$

$\lambda\log_2 3 + \lambda = 2 + 2\log_2 3 \Leftrightarrow \lambda(1 + \log_2 3) = 2(1 + \log_2 3) \Leftrightarrow \lambda = 2$

10. Πρέπει $x + 1 > 0$ και λογαριθμούμε και τα δύο μέλη, οπότε: $x = -0{,}9$ ή $x = 99$

11. Αν x, y οι αριθμοί πρέπει να ισχύουν: $\left.\begin{matrix} \ln x + \ln y = 2 \\ \ln x \cdot \ln y = -8 \end{matrix}\right\}$ οπότε:

$(x, y) = \left(\dfrac{1}{e^2}, e^4\right)$ ή $(x, y) = \left(e^4, \dfrac{1}{e^2}\right)$

12. Ισχύει $\log(x\cdot x^3\cdot x^5\cdot\ldots\cdot x^{2\nu-1}) = 2\nu^2 \Leftrightarrow x^{1+3+2+\ldots+(2\nu-1)} = 2\nu^2 \Leftrightarrow x^{\nu^2} = 2\nu^2 \Leftrightarrow$

$\nu^2\cdot\log x = 2\nu^2 \Leftrightarrow \log x = 2 \Leftrightarrow x = 100$

13. Ισχύει $\alpha_\rho = \alpha_1\lambda^{\rho-1}$ και $\alpha_\rho = k\alpha_1 \Leftrightarrow \alpha_1\lambda^{\rho-1} = k\alpha_1 \Leftrightarrow \log\lambda^{\rho-1} = \log k \Leftrightarrow$

$(\rho - 1)\log\lambda = \log\kappa$

14. i) Ισχύει $\log_4 x_o = 2$, οπότε $x_o = 16$

ii) Ισχύει $\log_{\frac{1}{2}} x_o = \dfrac{1}{2}$, οπότε $x_o = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

iii) Ισχύει $\ln x_0 = \dfrac{1}{e}$, οπότε $x_0 = e^{\frac{1}{e}}$

iv) Ισχύει $\ln\dfrac{1}{x_0} = e$, οπότε $x_o = e^{-e}$

15. α) Αν x = 0: f (0) = - 2, άρα τέμνει τον y΄y στο σημείο (0, - 2)

Αν y = 0 $\Leftrightarrow$ $\log_2 (x + 1) = 2$ $\Leftrightarrow$ x + 1 = 2 $\Leftrightarrow$ x = 3, άρα τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο (3, 0)

β) Πρέπει $f(-\frac{1}{2}) = k \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow k = -3$

16. Πρέπει συνx = 1, άρα x = 2kπ, $k \in \mathbf{Z}$

17. α) Αν λύσουμε ως προς x και θέσουμε y = 0 έχουμε: x = 200μP

β) y = 110dB

18. α) Για L = 20 έχουμε I = 100 Watt/m^2

β) ένταση ήχου Jet I = 10^{14} Watt/m^2

θόρυβος Rock 120dB

ένταση ήχου μοτοσικλέτας I = 10^8 Watt/m^2

θόρυβος συνομιλίας 60dB

γ) Για L = 260dB βρίσκουμε I = 10^{26} Watt/m^2