

Αρχιμήδης Μικροί 2000-2001

1. Αν $\alpha, \beta, \chi, \psi$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $\alpha+\beta=1$, να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y}} \leq \alpha x + \beta y.$$

Τότε ισχύει η ισότητα:

2. Οι αριθμοί μ, ν είναι ακέραιοι.

α) Να βρεθούν τα ζεύγη (μ, ν) που επαληθεύουν την εξίσωση $\mu^3 - 4\mu\nu^2 = 8\nu^3 - 2\mu^2\nu$.

β) Από τα ζεύγη που θα βρείτε να προσδιορίσετε εκείνα που ικανοποιούν την εξίσωση $\mu + \nu^2 = 3$.

3. Έχουμε να ζυγίσουμε 8 σώματα διαφορετικού βάρους με μία ζυγαριά χωρίς σταθμά, δηλαδή με αυτήν μπορούμε μόνο να συγκρίνουμε τα βάρη δύο σωμάτων.

α) Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός ζυγίσεων που πρέπει να κάνουμε για να προσδιορίσουμε το βαρύτερο σώμα;

β) Πόσες επιπλέον ζυγίσεις θα χρειαστούμε για να προσδιορίσουμε το δεύτερο σε βάρος σώμα;

4. Θεωρούμε τρίγωνο $ΑΒΓ$ και φέρουμε το ύψος $ΑΔ$ και τις διχοτόμους $ΑΕ, ΒΖ$ που τέμνονται στο $Ι$. Από το $Ι$ φέρουμε την $ΙΘ$ κάθετη προς την $ΑΓ$. Επιπλέον φέρουμε την ευθεία $χ'Αχ$ κάθετη στην $ΑΓ$. Η προέκταση της $ΕΘ$ τέμνει την $χ'Αχ$ στο $Κ$.

Να αποδείξετε ότι $ΑΚ=ΑΔ$.