Αρχιμήδης Μεγάλοι 2004-2005

1. Να προσδιορίσετε πολυώνυμο P(x) με πραγματικούς συντελεστές τέτοιο ώστε $P(2) = 12$ και $P(x^2) = x^2(x^2+1)P(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ .

2. Δίνεται η ακολουθία $(a_\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ με $a_1 = 1$ και $a_\nu = a_{\nu-1} + \frac{1}{\nu^3}$ , $\nu = 2, 3, \ldots$ .

α) Να αποδείξετε ότι $a_\nu < \frac{5}{4}$ , για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ .

β) Αν ε είναι δεδομένος θετικός πραγματικός αριθμός, να προσδιορίσετε τον ελάχιστο φυσικό αριθμό $\nu_0 > 0$ που είναι τέτοιος ώστε για κάθε $\nu > \nu_0$ να ισχύει

$$|a_{\nu+1} - a_\nu| < \varepsilon$$

3.Έστω κυρτή γωνία $x\hat{O}y$ . Εντός αυτής θεωρούμε τις ημιευθείες $Ox_1$, $Oy_1$ έτσι ώστε $x\hat{O}x_1 = y_1\hat{O}y < \frac{x\hat{O}y}{3}$ . Πάνω στις ημιευθείες $Ox_1$, $Oy_1$ θεωρούμε σταθερά σημεία Κ, Λ, αντίστοιχα, έτσι ώστε ΟΚ = ΟΛ. Αν τα σημεία Α και Β κινούνται πάνω στις πλευρές Οx και Οy, αντίστοιχα, έτσι ώστε Α≠Ο, Β≠Ο και το εμβαδόν του πολυγώνου ΟΑΚΛΒ να παραμένει σταθερό, να αποδείξετε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΟΑΒ διέρχονται από σταθερό σημείο, διαφορετικό του Ο.

4. Δίνεται ότι ο αριθμός k είναι θετικός ακέραιος και ότι η εξίσωση

$$x^3 + y^3 - 2y(x^2 - xy + y^2) = k^2(x - y) \qquad (1)$$

έχει μια λύση $(x_0,y_0)$, με $x_0,y_0 \in \mathbb{Z}^*$ και $x_0 \neq y_0$. Να αποδείξετε ότι:

α) η εξίσωση (1) έχει πεπερασμένο πλήθος λύσεων (x,y) με $x, y \in \mathbb{Z}$ και $x \neq y$.

β) είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε 11 επιπλέον διαφορετικές λύσεις (X,Y) της εξίσωσης (1), με $X, Y \in \mathbb{Z}^*$ και $X \neq Y$, όπου οι X, Y είναι συναρτήσεις των $x_0,y_0$.