

Αρχιμήδης Μικροί 2005-2006

1. Έστω P εσωτερικό σημείο ενός ισοπλεύρου τριγώνου $ΑΒΓ$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει τρίγωνο με μήκη πλευρών PA , PB και PG .

2. Να βρεθούν όλα τα ζεύγη θετικών ακεραίων (x,y) που ικανοποιούν την εξίσωση

$$2x^y - y = 2005$$

3. Να αποδειχθεί ότι, μεταξύ 27 οποιωνδήποτε διαφορετικών θετικών ακεραίων μικρότερων του 100, υπάρχουν πάντοτε δύο που δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους.

4. Οι πραγματικοί αριθμοί x, y είναι τέτοιοι ώστε $x^2 + xy + y^2 = 1$. Θέτουμε $K = x^3y + xy^3$. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του K .