

Αρχιμήδης Μεγάλοι 2006-2007

1. Να προσδιορίσετε τους φυσικούς αριθμούς n για τους οποίους ο αριθμός $2007 + 4^n$ είναι τέλειο τετράγωνο.

2. Αν a, β, γ είναι μέτρα πλευρών τριγώνου, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(a+\gamma-\beta)^4}{a(a+\beta-\gamma)} + \frac{(a+\beta-\gamma)^4}{\beta(\beta+\gamma-a)} + \frac{(\beta+\gamma-a)^4}{\gamma(a+\gamma-\beta)} \geq a\beta + \beta\gamma + \gamma a.$$

3. Σε κυκλικό δακτύλιο με ακτίνες R και $R-2r$, όπου $R=11r$, τοποθετούμε κύκλους ακτίνας r εφαπτόμενους των κύκλων που ορίζουν το δακτύλιο και ανά δυο μη επικαλυπτόμενους. Να προσδιορίσετε το μέγιστο αριθμό των κύκλων που μπορούμε να τοποθετήσουμε μέσα στο δακτύλιο. (Δίνεται ότι $9,94 < \sqrt{99} < 9,95$)

4. Σε κάθε τετράγωνο μιας σκακιέρας 2007×2007 τοποθετούμε έναν από τους αριθμούς 1 ή -1 . Συμβολίζουμε με A_i το γινόμενο των αριθμών της i -γραμμής, $i = 1, 2, \dots, 2007$, και με B_j το γινόμενο της j -στήλης, $j = 1, 2, \dots, 2007$. Να αποδείξετε ότι:

$$A_1 + A_2 + \dots + A_{2007} + B_1 + B_2 + \dots + B_{2007} \neq 0.$$