ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
30η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
23 Φεβρουαρίου 2013

Θέματα μικρών τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

(α) Να γράψετε την παράσταση $\mathrm{A} = k^4 + 4$, όπου k θετικός ακέραιος, ως γινόμενο δύο παραγόντων που ο καθένας τους να είναι άθροισμα δύο τετραγώνων ακεραίων αριθμών. ***Μονάδες 2***

(β) Να απλοποιήσετε την παράσταση

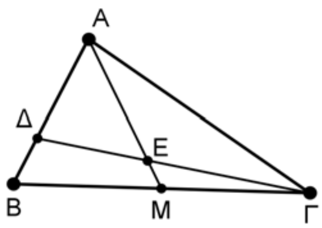
$$\mathrm{K} = \frac{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(6^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\cdots\cdot\left((2n)^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(5^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\cdots\cdot\left((2n-1)^4+\frac{1}{4}\right)}$$

και να τη γράψετε ως άθροισμα τετραγώνων δύο διαδοχικών θετικών ακέραιων.

Μονάδες 3

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$, με $\mathrm{AB} < \mathrm{A\Gamma}$. Έστω M το μέσο της πλευράς $\mathrm{B\Gamma}$. Στην πλευρά AB θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε, αν το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$ τέμνει τη διάμεσο AM στο σημείο E, τότε ισχύει ότι $\mathrm{A\Delta} = \Delta\mathrm{E}$. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{AB} = \Gamma\mathrm{E}$. ***Μονάδες 5***



ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Έστω $\mathrm{A} = \overline{abcd} = a\cdot 10^3 + b\cdot 10^2 + c\cdot 10 + d$ τετραψήφιος θετικός ακέραιος με ψηφία τέτοια ώστε να ισχύουν: $a \geq 7$ και $a > b > c > d > 0$. Θεωρούμε και τον θετικό ακέραιο $\mathrm{B} = \overline{dcba} = d\cdot 10^3 + c\cdot 10^2 + b\cdot 10 + a$, που προκύπτει από τον A με αντίστροφη γραφή των ψηφίων του. Αν δίνεται ότι ο αριθμός $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ έχει όλα τα ψηφία του περιττά, να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του αριθμού A.

Μονάδες 5

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Να βρείτε όλες τις τριάδες (x, y, z) θετικών ακέραιων αριθμών που είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{4}{z} = 1.$$

Μονάδες 5

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες και 30 λεπτά
Καλή επιτυχία