

Ευκλείδης Γ' Λυκείου 1995-1996

1. Να ορίσετε συνάρτηση με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το \mathbb{N}^* και η οποία να ικανοποιεί τη σχέση:

$$[f(1)]^3 + [f(2)]^3 + \dots + [f(v)]^3 = [f(1) + f(1) + \dots + f(v)]^2, \text{ για κάθε } v \in \mathbb{N}^* .$$

2. Ο Α και ο Β παίζουν το παρακάτω παιχνίδι:

Σ' ένα χαρτί είναι γραμμένα κ "-" (πρόσημα πλην).

Καθένας, εναλλάξ, μπορεί να αλλάξει ένα είτε δύο πρόσημα από "-" σε "+".

Τα πρόσημα που θα αλλαχθούν μπορούν να βρίσκονται σε οποιαδήποτε θέση αρκεί όταν αλλάζονται δύο, αυτά να είναι γειτονικά.

Θα νικήσει αυτός που θα μεταβάλλει το τελευταίο "-" σε "+".

Υπάρχει στρατηγική, ώστε να νικήσει κάποιος από τους παίκτες;

3. Γράφουμε τους αριθμούς 1, 2, ..., 1995 με όποια σειρά θέλουμε, ώστε να σχηματιστεί ένας αριθμός.

Να εξετάσετε αν ο αριθμός που σχηματίζεται είναι τέλειο τετράγωνο.

4. Έστω ορθογώνιο ΑΒΓΔ και Κ σημείο της διχοτόμου της γωνίας \hat{A} , το οποίο βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΔ. Έστω Ε το σημείο τομής των ΒΚ, ΓΔ και Ζ το σημείο τομής των ΔΚ, ΓΒ.

Να αποδείξετε ότι $ΕΔ=ΖΒ$.