Ευκλείδης Β' Λυκείου 1997-1998

1. Έστω α,β ∈ N^* και $A=\dfrac{\alpha^3+1}{\beta+1}+\dfrac{\beta^3+1}{\alpha+1} \in N^*$.

Να δειχτεί ότι οι αριθμοί $\dfrac{\alpha^3+1}{\beta+1}$, $\dfrac{\beta^3+1}{\alpha+1}$ είναι φυσικοί.

2. Έστω ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ= $\sqrt{2}$ ΑΔ. Με διάμετρο την ΓΔ γράφουμε ημικύκλιο στο εξωτερικό του ΑΒΓΔ και συνδέουμε τυχαίο σημείο Μ του ημικυκλίου με τα Α, Β. Έστω Κ, Λ οι τομές των ΜΑ, ΜΒ με την ΓΔ.

Να δειχτεί ότι $ΔΛ^2 + ΔΚ^2 = AB^2$.

(Η άσκηση αυτή κατασκευάστηκε από τον P. Fermat και λύσεις έδωσαν οι L.Euler, R Simson κ.α.)

3. Να δειχτεί ότι ο αριθμός $A=\underbrace{11...1}_{\nu\,\psi\eta\varphi\acute{\iota}\alpha}2\underbrace{11...1}_{\nu\,\psi\eta\varphi\acute{\iota}\alpha}$ είναι σύνθετος για κάθε ν ∈ N^*.

4. Έστω $0\le\alpha,\beta,\gamma,\delta\le 1$ και $0\le x,y,z,w\le\dfrac{1}{2}$ ώστε α+β+γ+δ=x+y+z+w=1 (1).

Να δειχτεί ότι αx+βy+γz+δw ≥ $\min\left\{\dfrac{\alpha+\beta}{2},\dfrac{\alpha+\gamma}{2,}\dfrac{\alpha+\delta}{2},\dfrac{\beta+\gamma}{2},\dfrac{\beta+\delta}{2},\dfrac{\gamma+\delta}{2}\right\}$.