

Ευκλείδης Γ' Λυκείου 1997-1998

1. Να βρεθούν οι συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(0)=0 \text{ και } f(x\sigma\upsilon\nu\theta) - f(x\sigma\upsilon\nu^2\theta) = x-x^2\sigma\upsilon\nu\theta, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \theta \in \mathbb{R} - \left\{ k\pi, k\pi + \frac{\delta}{2} \right\}, k \in \mathbb{Z}.$$

2. Έστω A, B, Γ $n \times n$ πίνακες με $AB\Gamma + AB + B\Gamma + A\Gamma + A + B + \Gamma = O$.

Να δειχτεί ότι $A(B + \Gamma) = (B + \Gamma)A$ αν και μόνο αν $A(B\Gamma) = (B\Gamma)A$.

3. Έστω τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και O τυχαίο σημείο του επιπέδου του.

Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της $\Pi = \frac{(OA)+(O\Gamma)}{(OB)+(O\Delta)}$.

4. Θεωρούμε 9 σημεία που αποτελούν τις κορυφές 10 διαφορετικών τριγώνων.

Να δειχτεί ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο από τα δοσμένα τρίγωνα, τα οποία έχουν ακριβώς μία κοινή κορυφή.