Ευκλείδης Γ' Λυκείου 1998-1999

1. Έστω $\alpha_\nu = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + ... + \frac{1}{\nu\cdot(\nu+2)}$. Να δειχτεί ότι $\alpha_{1999} \leq \frac{1}{4}(2{,}999)$ .

2. Έστω $\nu \in \mathbb{N}^*$.

α) Να δειχτεί ότι δεν υπάρχουν φυσικοί αριθμοί α, β, γ, δ του διαστήματος $\Delta = [\nu^2, (\nu+1)^2]$ που να αποτελούν γεωμετρική πρόοδο.

β) Να προσδιορίσετε όλους τους φυσικούς αριθμούς α, β, γ, δ του διαστήματος $E = [\nu^3, (\nu+1)^3]$ που αποτελούν γεωμετρική πρόοδο.

3. Θεωρούμε την παράσταση $K = \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+...+\alpha_\nu\beta_\nu$, $\nu \in \mathbb{N}^*$, όπου οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_\nu$ μπορούν να πάρουν τις τιμές 0 ή 1.

Έστω $A(\nu)$ το πλήθος των 2ν-άδων $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_\nu)$ για τις οποίες ο αριθμός K είναι άρτιος και $\Pi(\nu)$ το πλήθος των 2ν-άδων αυτών, για τις οποίες ο αριθμός K είναι περιττός.

Να δειχτεί ότι $\frac{A(\nu)}{\Pi(\nu)} = \frac{2^\nu+1}{2^\nu-1}$ .

4. Έστω κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ και μ=max{AB, BΓ, ΓΔ, ΔA}.

Να δειχτεί ότι $4\mu^2 \geq A\Gamma^2 + B\Delta^2$ .