

Ευκλείδης Β' Λυκείου 2000-2001

1. Έστω κύκλος (O,R) , μια διάμετρος του AB και ένα σημείο του Γ διαφορετικό των A, B . Θεωρούμε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία B και Γ αντιστοίχως, οι οποίες τέμνονται στο P . Η κάθετος από το Γ προς τη διάμετρο AB την τέμνει στο Δ , ενώ η ευθεία AP τέμνει την ευθεία $\Gamma\Delta$ στο E .

Να υπολογιστεί ο λόγος $\frac{\Gamma E}{\Gamma \Delta}$.

2. Για $x, y, z > 0$ να αποδειχτεί ότι:

α)
$$\frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2} \leq x + y$$

β)
$$f(x, y, z) = \frac{x^3}{x^2 + xy + y^2} + \frac{y^3}{y^2 + yz + z^2} + \frac{z^3}{z^2 + zx + x^2} \leq x + y + z.$$

3. Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα $AB=3a$ και τα σημεία του Γ και Θ με $B\Gamma=a$, $B\Theta=2a$. Κατασκευάζουμε τα τετράγωνα $B\Gamma\Delta E$ και $B\Theta H Z$ εκατέρωθεν του AB .

Να αποδείξετε ότι οι ευθείες AB , ΔZ και $E H$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

4. Δύο μαθητές A και B παίζουν το ακόλουθο παιχνίδι:

Πάνω σε ένα κύκλο δίνονται 100 διαφορετικά σημεία και οι δύο μαθητές διαδοχικά ο ένας μετά τον άλλο γράφουν μια χορδή, διαφορετική κάθε φορά, με άκρα δύο οποιαδήποτε από τα 100 δεδομένα σημεία. Το παιχνίδι τελειώνει όταν καθένα από τα 100 σημεία χρησιμοποιηθεί ως άκρο χορδής μία τουλάχιστον φορά. Νικητής είναι ο μαθητής ο οποίος θα γράψει τη χορδή με την οποία τελειώνει το παιχνίδι.

Αν ο μαθητής A αρχίσει πρώτος, ποιος από τους δύο μαθητές έχει στρατηγική νίκης; (δηλαδή ποιος από τους δύο μαθητές μπορεί να παίξει έτσι, ώστε να νικήσει, ανεξαρτήτως του πως θα παίξει ο άλλος;)