

1. Να προσδιοριστούν οι τιμές των παραμέτρων $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για τις οποίες οι ρίζες των εξισώσεων

$$x^2 - \alpha x - 1 = 0 \quad \text{και} \quad x^2 - \beta x - 1 = 0$$

σχηματίζουν με κατάλληλη διάταξη μία αριθμητική πρόοδο με 4 όρους.

2. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x, y, z) = x^2yz + 3x^2y + 2x^2z + 6x^2 + 11xyz + 22xz + 33xy + 66x.$$

1) Να γράψετε το $P(x, y, z)$ ως γινόμενο πρωτοβάθμιων όρων.

2) Για ποιες τριάδες φυσικών αριθμών (x, y, z) ισχύει $P(x, y, z) = 2002$;

3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο και ισχύει $AB = A\Gamma = 2$ και $B\Gamma = 3$. Θεωρούμε σημείο Δ της $B\Gamma$ τέτοιο ώστε $B\Delta = 2\Delta\Gamma$.

Στο σημείο Δ φέρνουμε ευθεία κάθετη προς την $A\Delta$ η οποία τέμνει το τόξο $AB\Gamma$ στο M .

Να υπολογίσετε την περίμετρο του τετραπλεύρου $ABM\Gamma$ συναρτήσει του $AM = \kappa$.

4. Στην Ε.Μ.Ε. γίνονται μαθήματα προετοιμασίας για τις Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες για τους 20 μαθητές που προκρίνονται στην τελική φάση. Διδάσκονται 4 μαθήματα: Γεωμετρία, Θεωρία αριθμών, Συνδυαστική, Άλγεβρα.

Δήλωσαν συμμετοχή: στη Γεωμετρία 15 μαθητές, στη Θεωρία αριθμών 13, στη Συνδυαστική 14 και στην Άλγεβρα 19 μαθητές.

Να αποδείξετε ότι ένας τουλάχιστον μαθητής δήλωσε συμμετοχή και στα 4 μαθήματα.