Ευκλείδης Γ' Λυκείου 2003-2004

1. Οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί α, β, γ, x, y, z ικανοποιούν τις ισότητες

$$\alpha^2+\beta^2=\gamma^2 \text{ και } x^2+y^2=z^2.$$

Να αποδείξετε ότι ικανοποιούν και τη σχέση $(\alpha+x)^2+(\beta+y)^2 \leq (\gamma+z)^2$.

Πότε ισχύει η ισότητα;

2. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΓΔ=6 και ΑΒ=x, όπου x θετικός ακέραιος. Οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο Ε. Η παράλληλη από το Ε προς τις βάσεις τέμνει τις ΑΔ και ΒΓ στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα.

Να προσδιορίσετε τις τιμές του x για τις οποίες το μήκος του ΖΗ είναι θετικός ακέραιος.

3. Σε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $A\hat{\Gamma}\Delta$ που τέμνει τη ΒΔ στο Λ και την προέκτασή της ΒΑ στο Κ.

Για το σημείο τομής των διαγωνίων Μ ισχύει $MA\cdot M\Gamma+MA\cdot \Gamma\Gamma=MB\cdot M\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι $B\hat{K}\Gamma = B\hat{\Delta}\Gamma$.

4. Να αποδείξετε ότι για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ ισχύει

$$\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_1(\alpha_1+\alpha_2)}+\frac{\alpha_3-\alpha_2}{\alpha_2(\alpha_2+\alpha_3)}+\ldots+\frac{\alpha_\nu-\alpha_{\nu-1}}{\alpha_{\nu-1}(\alpha_{\nu-1}+\alpha_\nu)}+\frac{\alpha_1-\alpha_\nu}{\alpha_\nu(\alpha_\nu+\alpha_1)}\geq 0 .$$