



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ " Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ "
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Δίνεται ότι το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \kappa x + \lambda$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ έχει τις πραγματικές ρίζες $x_1, x_2,$ και x_3 που ανά δύο είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Να εκφράσετε την παράσταση

$$\Gamma = (1 - x_1^2)(1 - x_2^2)(1 - x_3^2)$$

συναρτήσει των κ, λ .

2. Θεωρούμε τόξο $\widehat{AB} = 90^\circ$ και προεκτείνουμε τη χορδή AB κατά ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma = AB$. Ονομάζουμε Δ το σημείο επαφής της εφαπτομένης του τόξου \widehat{AB} από το Γ και Κ το ίχνος της κάθετης από το Α προς τη ΒΔ. Να αποδείξετε ότι: $KB = 2KA$.
3. Αν α, β είναι θετικοί ακέραιοι, να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{\alpha^4 + \beta^4}{\alpha + \beta}\right)^{\alpha + \beta}} \geq \alpha^\alpha \beta^\beta.$$

4. Δίνεται τρίγωνο ABΓ. Από σημείο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε παράλληλες προς τις ΑΓ και ΑΒ που τέμνουν τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Κ και Λ, αντίστοιχα. Αν είναι $MK = x,$ $ML = y,$ να βρείτε το ελάχιστο της παράστασης

$$S = x^2 + y^2$$

και τη θέση του σημείου Μ για την οποία λαμβάνεται αυτό.

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία