



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
72<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”  
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2012

Α΄ τάξη Λυκείου

**Πρόβλημα 1**

Να βρείτε το υποσύνολο των πραγματικών αριθμών στο οποίο συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{|x|-1}{3} \leq \frac{|x|+x^2}{4} \quad \text{και} \quad \frac{x+1}{2} + \frac{x(x+1)}{4} > \frac{(x+2)^2}{4}.$$

*Μονάδες 5*

**Πρόβλημα 2**

Να προσδιορίσετε τις λύσεις της εξίσωσης

$$\frac{x+x^2}{1-x^2} \cdot \frac{[(1+ax)^2 - (a+x)^2]}{1-a^2} = \frac{ab}{(a-b)^2},$$

για τις διάφορες τιμές των πραγματικών αριθμών  $a, b$  με  $ab(a-b)(1-a^2) \neq 0$ .

*Μονάδες 5*

**Πρόβλημα 3**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{B} = 90^\circ$  και  $\hat{A} < 45^\circ$ . Θεωρούμε τα μέσα  $\Delta$  και  $E$  των πλευρών  $B\Gamma$  και  $A\Gamma$ , αντίστοιχα, και σημείο  $M$  διαφορετικό από το  $A$  στο ευθύγραμμο τμήμα  $AE$ . Αν η μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος  $BM$  τέμνει την ευθεία  $\Delta E$  στο  $Z$  και την ευθεία  $A\Gamma$  στο  $\Theta$ , να αποδείξετε ότι:

(α)  $B\hat{M}Z = \hat{A}$ .

(β) Η ευθεία  $BZ$  διχοτομεί τη γωνία  $\Theta\hat{B}E$ .

*Μονάδες 5*

**Πρόβλημα 4**

Αν υπάρχουν ακέραιοι  $x, y, a$  που επαληθεύουν την εξίσωση

$$yx^2 + (y^2 - a^2)x + y(y-a)^2 = 0,$$

να αποδείξετε ότι ο αριθμός  $xy$  είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

*Μονάδες 5*

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**