



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
76^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
16 Ιανουαρίου 2016

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος $b_1 = (x-4)^2$, $b_2 = x^2 + 16, \dots$, όπου x πραγματικός αριθμός.

Να προσδιορίσετε:

(α) Το άθροισμα των n πρώτων όρων της.

(β) Την τιμή του n , ($n > 1$), για την οποία ο μέσος όρος των n πρώτων όρων της προόδου ισούται με το τετράγωνο μιας παράστασης του x , για κάθε πραγματικό αριθμό x .

Πρόβλημα 2

Να λυθεί στο σύνολο των πραγματικών αριθμών η εξίσωση:

$$10x^4 - 8x^3 - 24x^2 - 32x - 16 = 0.$$

Πρόβλημα 3

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : A \rightarrow R$, όπου $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και $f(x) \cdot g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$. Αν για κάθε $x, y \in A$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$f\left(\frac{g(x)}{g(y)}\right) = \frac{f(g(x))}{y} \quad (1), \quad g\left(\frac{f(x)}{f(y)}\right) = \frac{g(f(x))}{y}, \quad (2)$$

να αποδείξετε ότι:

(α) Οι συναρτήσεις f, g είναι '1-1' (ένα προς ένα).

(β) $f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = g(x) \cdot g\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ για κάθε $x \in A$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο ABC (με $AB < AC < BC$) και ο περιγεγραμμένος κύκλος του $c(O, R)$.

Ο κύκλος $c_1(C, AB)$ (με κέντρο το σημείο C και ακτίνα AB) τέμνει τον κύκλο (c) στα σημεία D και E (το E ανήκει στο τόξο στο οποίο δεν ανήκει το σημείο A). Ο κύκλος $c_2(B, BD)$ (με κέντρο το σημείο B και ακτίνα BD) τέμνει τον κύκλο (c_1) στο σημείο F . Να αποδείξετε ότι η AF περνάει από το μέσο M της BC .

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!