

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
77^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
28 Ιανουαρίου 2017

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση:

$$x^4 - 32x^2 + 257 - \frac{4|x+2|}{x^2 + 4x + 8} = 0.$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε τις τιμές του θετικού ακέραιου n για τις οποίες ο αριθμός $A = \sqrt{n(n+182)}$ είναι ρητός.

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$ (με $AB < A\Gamma < B\Gamma$) και τυχόν σημείο Δ του μικρού τόξου AB . Από το σημείο Δ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τη $B\Gamma$, η οποία τέμνει την AB στο E , την $A\Gamma$ στο Z και τον περιγεγραμμένο κύκλο $c(O,R)$ (για δεύτερη φορά) στο H . Ο περιγεγραμμένος κύκλος c_1 του τριγώνου $B\Delta E$ τέμνει την BZ στο K και την $B\Gamma$ στο Λ . Ο περιγεγραμμένος κύκλος c_2 του τριγώνου $\Gamma Z H$ τέμνει την $E\Gamma$ στο M και την $B\Gamma$ στο N . Να αποδείξετε ότι τα σημεία K, M, Z, E βρίσκονται επάνω στον ίδιο κύκλο, στον οποίο εφάπτεται η ευθεία NZ .

Πρόβλημα 4

Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί την ισότητα

$$f(2xf(y) + y) + f(2x(y+1)) = f(2x+y) + 4xy, \quad (1)$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

- (i) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(a) = 1$.
- (ii) Να βρείτε τον τύπο της f .

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!