

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
78^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
20 Ιανουαρίου 2018

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$(a-1)(x^2+2x+2)^2=(a+1)(x^4+4),$$

για τις διάφορες τιμές της πραγματικής παραμέτρου a .

Πρόβλημα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sin x + \sin(x\sqrt{2}) + \sin(x\sqrt{3})$, $x \in \mathbb{R}$. Να εξετάσετε, αν υπάρχει πραγματικός αριθμός $T > 0$ τέτοιος ώστε

$$f(x+T) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AB < \Gamma\Delta$) και έστω O το σημείο τομής των διαγώνιων του $A\Gamma$ και $B\Delta$. Έστω ακόμη K το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου C_1 του τριγώνου OAB και M το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου C_2 του τριγώνου $O\Delta\Gamma$. Αν E είναι το σημείο τομής των ευθειών KA και $M\Delta$ και Z είναι το σημείο τομής των KB και $M\Gamma$, να αποδείξετε ότι τα σημεία K, O, M καθώς και το μέσο της EZ βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία.

Πρόβλημα 4

Αν οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί p, q, r με $p > q > r$ είναι πρώτοι, να εξετάσετε, αν οι αριθμοί $\sqrt[3]{2018pq}, \sqrt[3]{2018qr}, \sqrt[3]{rp}$ μπορούν να ανήκουν στην ίδια αριθμητική πρόοδο.

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες*

Καλή επιτυχία!