**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ**
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

**GREEK MATHEMATICAL SOCIETY**
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

# ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
# 80ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
**18 Ιανουαρίου 2020**

## Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

### Πρόβλημα 1
Αν οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta$ με άθροισμα $\alpha+\beta=1$ είναι τέτοιοι ώστε $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}=x,\ x\geq 2,$ να προσδιορίσετε την τιμή του $x$ έτσι ώστε να ισχύει:

$$\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^3+\beta^3}=\frac{13}{6}.$$

### Πρόβλημα 2
Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $x, y, \omega$ με $x-2y+\omega>0$ , $2x-y+\omega>0$ ισχύουν:

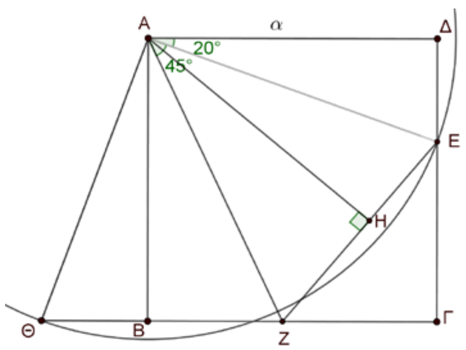
$$x-2y+\omega+\frac{1}{x-2y+\omega}\leq 2 \qquad (1)$$

$$2x-y+\omega+\frac{1}{2x-y+\omega}\leq 2, \qquad (2)$$

να αποδείξετε ότι: $2020(x+y)^{2021}+\omega^2-2\omega\geq -1.$

### Πρόβλημα 3
Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους $\alpha, \beta, \gamma$ που είναι μεγαλύτεροι του 1 και ικανοποιούν όλες τις παρακάτω συνθήκες:
(i) ο $2\alpha-1$ είναι πολλαπλάσιο του $\beta$, (ii) ο $2\beta-1$ είναι πολλαπλάσιο του $\gamma$ και
(iii) ο $\gamma-1$ είναι πολλαπλάσιο του $\alpha$.

### Πρόβλημα 4
Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς $\alpha$. Θεωρούμε σημείο Ε πάνω στην πλευρά ΓΔ και σημείο Ζ πάνω στην πλευρά ΒΓ έτσι ώστε $\Delta\hat{A}E=20^0$ και $E\hat{A}Z=45^0$. Ο κύκλος $\gamma$ κέντρου Α και ακτίνας ΑΕ τέμνει την προέκταση της πλευράς ΒΓ προς το μέρος του Β σε σημείο Θ έτσι ώστε το Β να βρίσκεται μεταξύ των σημείων Ζ και Θ. Φέρουμε και το ύψος ΑΗ του τριγώνου ΑΖΕ. Να αποδείξετε ότι $Z\Theta=ZE$ και να υπολογίσετε το μήκος του ύψους ΑΗ συναρτήσει του $\alpha$. ***Σημείωση:*** *Να κάνετε στο φύλλο των απαντήσεων σας το δικό σας σχήμα.*




***Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες*** ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
***Καλή επιτυχία!***