



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
80<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”  
18 Ιανουαρίου 2020

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

**Πρόβλημα 1**

Η ακολουθία πραγματικών αριθμών  $a_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  είναι τέτοια ώστε η ακολουθία των

μέσων όρων  $M_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  να ικανοποιεί την ισότητα

$$M_{n+1} = \frac{M_n + M_{n+2}}{2}, \text{ για κάθε } n = 1, 2, 3, \dots$$

Να αποδείξετε ότι η ακολουθία  $a_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  είναι αριθμητική πρόοδος.

**Πρόβλημα 2**

Η Μαρία διάβασε τον περασμένο Νοέμβρη ένα πολυσέλιδο λογοτεχνικό βιβλίο. Κρατούσε σημειώσεις για το πόσες νέες σελίδες διάβαζε κάθε μέρα και μας έδωσε τα εξής στοιχεία για τον μέσο όρο των νέων σελίδων που διάβαζε στα παρακάτω χρονικά διαστήματα:

- Από τις 1 μέχρι και τις 15 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν 10.
- Από τις 6 μέχρι και τις 20 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν 20.
- Από τις 11 μέχρι και τις 30 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν 30.

(α) Να προσδιορίσετε τον μέγιστο και τον ελάχιστο δυνατό αριθμό σελίδων του βιβλίου.

(β) Αν δίνεται επιπλέον ότι από τις 11 μέχρι και τις 15 του Νοέμβρη ο μέσος όρος των νέων σελίδων που διάβασε ήταν 10, να βρείτε πόσες ακριβώς σελίδες είχε το βιβλίο.

**Πρόβλημα 3.** Να προσδιορίσετε όλα τα πολυώνυμα  $P(x)$  με πραγματικούς συντελεστές που ικανοποιούν την ισότητα

$$P(x^2) = (P(x))^2 - 2P(x) + 2,$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Πρόβλημα 4**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  εγγεγραμμένο σε κύκλο  $c(O, R)$  με  $AB < A\Gamma < B\Gamma$  και έστω  $c_1$  ο κύκλος που το κέντρο του  $\Delta$  βρίσκεται επάνω στην  $B\Gamma$  και περνά από τα σημεία  $B, O$ . Ο κύκλος  $c_1$  τέμνει την  $AB$  στο σημείο  $E$  και τον κύκλο  $c$  στο σημείο  $Z$ . Αν τέλος ο περιγεγραμμένος κύκλος  $c_2(O, \Delta, E)$  του τριγώνου  $O\Delta E$ , τέμνει την  $AB$  στο σημείο  $K$ , να αποδείξετε ότι τα σημεία  $\Gamma, \Delta, Z, O$  βρίσκονται επάνω στον ίδιο κύκλο ο οποίος εφάπτεται στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου  $AOK$ .

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες  
Καλή επιτυχία!*

*Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες*