

Θαλής Γ' Λυκείου 1995-1996

1. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της παράστασης:

$$H(x, y) = xy + x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$$

με $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$.

2. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει ότι:

$$f(x-2) + f(x+2) = \sqrt{3} f(x).$$

Να δείξετε ότι η f είναι περιοδική.

3. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και ε μια ευθεία που περνάει από το βαρύκεντρο Θ του τριγώνου και τέμνει τις AB , $A\Gamma$ στα K , Λ αντίστοιχα.

Να δείξετε ότι $\frac{AK}{KB} \geq 4 \frac{A\Lambda}{AA}$.

4. Έστω A ένα σύνολο n ακεραίων αριθμών. Από το σύνολο αυτό κατασκευάζουμε όλες τις δυνατές παραστάσεις παίρνοντας ένα ορισμένο πλήθος αριθμών και προσθαφερώντας τους μεταξύ τους. Π.χ. αν $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, a_{i_4} \in A$ τότε μια δυνατή παράσταση είναι η

$$a_{i_1} + a_{i_2} - a_{i_3} + a_{i_4} \text{ ή } -a_{i_1} + a_{i_2} + a_{i_3} + a_{i_4}.$$

Δύο διαφορετικές παραστάσεις ανεξάρτητα από το αποτέλεσμα τους θα θεωρούνται διακεκριμένες.

Να υπολογιστεί το πλήθος των δυνατών παραστάσεων.