



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

Γ' Λυκείου

1. Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς η εξίσωση

$$(2x^2 + 3x + 1)^3 - (x^2 + 3x + 2)^3 = 7(x^2 - 1)^3.$$

2. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$. Το ύψος του $A\Delta$ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του στο σημείο Z και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $B\Delta Z$ τέμνει την ευθεία AB στο σημείο E . Αν η ευθεία $E\Delta$ τέμνει την ευθεία $A\Gamma$ στο K και η ευθεία ZK τέμνει την ευθεία $B\Gamma$ στο σημείο Λ , να αποδείξετε ότι το σημείο Δ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $B\Lambda$.

3. Σε τουρνουά τένις συμμετέχουν 2^m , όπου m θετικός ακέραιος, αθλητές οι οποίοι έχουν βαθμολογηθεί και καταταγεί ανάλογα με την γενικότερη επίδοση τους. Το τουρνουά διεξάγεται σε “γύρους”. Στον πρώτο “γύρο” ο πρώτος αθλητής αγωνίζεται με τον τελευταίο αθλητή, ο δεύτερος αγωνίζεται με τον προτελευταίο και η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να αγωνιστούν όλοι οι αθλητές. Οι νικητές του πρώτου “γύρου” κατατάσσονται ξανά και συμμετέχουν στον δεύτερο “γύρο” ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία με αυτή του πρώτου “γύρου”. Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να ανακηρυχτεί ο πρωταθλητής. Σε κάθε νικητή του πρώτου γύρου δίνονται 10 βαθμοί, σε κάθε νικητή του δεύτερου γύρου δίνονται 20 βαθμοί, σε κάθε νικητή του τρίτου γύρου δίνονται 30 βαθμοί κ.ο.κ.

- α. Αν ο θετικός ακέραιος m είναι πολλαπλάσιο του 3, να αποδείξετε ότι το συνολικό πλήθος των αγώνων είναι πολλαπλάσιο του 7.
- β. Αν ο πρωταθλητής συγκέντρωσε συνολικά 210 βαθμούς, να βρείτε τον αριθμό των αθλητών που συμμετείχαν.

4. Μια ευθεία εφάπτεται των κύκλων $c_1(O_1, r_1)$ και $c_2(O_2, r_2)$ στα διακεκριμένα σημεία A και B , αντιστοίχως. Αν το M είναι κοινό σημείο των δύο κύκλων $c_1(O_1, r_1)$, $c_2(O_2, r_2)$ και ισχύει ότι $r_1 < r_2$, να αποδείξετε ότι $MA < MB$.