



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
80<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”  
9 Νοεμβρίου 2019

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

**Πρόβλημα 1**

Οι αριθμοί  $\alpha, \beta$  είναι θετικοί και τέτοιοι ώστε

$$10(\alpha^2 + \beta^2) = 29\alpha\beta \quad \text{και} \quad \alpha + \beta = 7.$$

Να υπολογίσετε την τιμή των αθροισμάτων  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$  και  $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$ .

**Πρόβλημα 2**

Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο και το μικρότερο από τα κλάσματα:

$$\frac{3019}{3020}, \frac{3020}{3021}, \frac{3021}{3022}, \frac{4019}{4020}, \frac{4020}{4021}, \frac{4021}{4022},$$

χωρίς να τα μετατρέψετε σε δεκαδικό αριθμό. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**Πρόβλημα 3**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  τέτοιο ώστε  $A\hat{B}\Gamma = 2 \cdot B\hat{\Gamma}A$ . Η διχοτόμος της γωνίας  $B\hat{A}\Gamma$  τέμνει την πλευρά  $B\Gamma$  στο σημείο  $\Delta$  έτσι ώστε  $AB = \Delta\Gamma$ . Η διχοτόμος της γωνίας  $A\hat{B}\Gamma$  τέμνει την πλευρά  $A\Gamma$  στο σημείο  $E$ .

(α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $ABE$  και  $\Delta\Gamma E$  είναι ίσα.

(β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία  $B\hat{A}\Gamma$ .

**Πρόβλημα 4**

Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του ακέραιου αριθμού  $\alpha$  για τις οποίες ο ρητός αριθμός

$$A = \frac{(\alpha^2 - 1)^3}{(\alpha - 1)^4}$$
 είναι ακέραιος.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες  
Καλή επιτυχία!

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες