Πολλαπλασιασμός ρητών αριθμών

Δρ. Παναγιώτης Λ. Θεοδωρόπουλος
Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03
ps.theodoropoulos@gmail.com

Εισαγωγή

Από την πείρα μας γνωρίζουμε ότι πολλοί μαθητές της Α΄ Γυμνασίου δυσκολεύονται να κατανοήσουν τους αλγόριθμους των πράξεων στο σύνολο των ρητών αριθμών. Αυτό οφείλεται κυρίως στο πρόσημο που εισάγεται στην έννοια του αριθμού και αλλάζει την αντίληψη που έχουν σχηματίσει οι μαθητές για τους αριθμούς και τις πράξεις τους (επιστημολογικό εμπόδιο). Σ' αυτό συνηγορεί και η ιστορική πορεία των αρνητικών αριθμών που, όπως γνωρίζουμε, ενώ ήταν γνωστοί από την αρχαιότητα, άρχισαν να γίνονται αποδεκτοί ως μαθηματικές οντότητες τον 17^{ο} αιώνα και θεμελιώθηκαν αυστηρά τον 19^{ο} αιώνα! Γι' αυτό λοιπόν για τη διδασκαλία των πράξεων στο σύνολο των ρητών αριθμών στην Α΄ Γυμνασίου καλό είναι να χρησιμοποιούνται διάφορα διδακτικά μοντέλα, ώστε οι μαθητές να κατανοούν και να εμπεδώνουν τους αντίστοιχους αλγόριθμους. Ειδικά για την πράξη του πολλαπλασιασμού πρέπει οι μαθητές να κατανοούν ότι **ο κανόνας των προσήμων δεν ορίζεται αυθαίρετα, αλλά επιβάλλεται από άλλους μαθηματικούς και λογικούς κανόνες**. Αν δίνεται απ' ευθείας στους μαθητές, οι μαθητές δεν ικανοποιούνται, γιατί δεν κατανοούν την σκοπιμότητα ενός τέτοιου ορισμού.

Στην παρούσα εργασία προτείνονται τέσσερα διδακτικά μοντέλα, ένα αριθμητικό, ένα αναλογικοπροσθετικό, ένα αναλυτικό και ένα φυσικό για τη διδασκαλία του πολλαπλασιασμού στο σύνολο των ρητών αριθμών, τα οποία έχουν ως σκοπό την κατανόηση και εμπέδωση του αντίστοιχου αλγόριθμου από τους μαθητές.

1. Αριθμητικό μοντέλο

Με το αριθμητικό μοντέλο διδασκαλίας της πράξης του πολλαπλασιασμού στο σύνολο των ρητών αριθμών δίνουμε μία σειρά γινομένων ρητών αριθμών, η οποία ακολουθεί έναν λογικό κανόνα, με τη βοήθεια της οποίας οι μαθητές ανακαλύπτουν τον κανόνα των προσήμων. Τα γινόμενα με τα οποία θα ξεκινάμε καλό είναι να έχουν θετικούς ακέραιους παράγοντες, διότι οι μαθητές αντιλαμβανόμενοι διαισθητικά τον ισομορφισμό μεταξύ του συνόλου των μη αρνητικών ακεραίων και του συνόλου των φυσικών αριθμών κατανοούν πιο εύκολα τέτοια γινόμενα. Για παράδειγμα, κατανοούν πολύ εύκολα ότι $(+5)\cdot(+4) = +20$, αφού γνωρίζουν ότι $5\cdot4 = 20$.

Έτσι λοιπόν, αν δοθεί η παρακάτω σειρά γινομένων (*για τα δύο τελευταία γινόμενα δίνουμε μόνο τους παράγοντες*):

$(+5)\cdot(+4) = +20$
$(+5)\cdot(+3) = +15$
$(+5)\cdot(+2) = +10$
$(+5)\cdot(+1) = +5$
$(+5)\cdot 0 = 0$
$(+5)\cdot(-1) =$
$(+5)\cdot(-2) =$

οι μαθητές παρατηρούν ότι στα γινόμενα αυτά ο πρώτος παράγοντας είναι σταθερός, το +5, ενώ ο δεύτερος μειώνεται συνεχώς κατά μία θετική μονάδα και πως τα γινόμενα μειώνονται συνεχώς κατά πέντε θετικές μονάδες, οπότε ακολουθώντας αυτόν τον κανόνα συμπεραίνουν εύκολα ότι:

$$(+5)\cdot(-1) = -5 \qquad \textit{και} \qquad (+5)\cdot(-2) = -10.$$

Με μια τέτοια σειρά γινομένων οι μαθητές συμπεραίνουν ότι **γενικά το γινόμενο δύο ετερόσημων ρητών αριθμών είναι αρνητικός ρητός αριθμός**. (Οι μαθητές διαισθάνονται και την αντιμεταθετική ιδιότητα που ισχύει στον πολλαπλασιασμό των ρητών αριθμών).

Αμέσως μετά δίνουμε και μία άλλη σειρά γινομένων, όπως η παρακάτω, για την εξαγωγή του κανόνα του γινομένου δύο αρνητικών ρητών αριθμών:

$(-5)\cdot(+4) = -20$
$(-5)\cdot(+3) = -15$
$(-5)\cdot(+2) = -10$
$(-5)\cdot(+1) = -5$
$(-5)\cdot 0 = 0$
$(-5)\cdot(-1) =$
$(-5)\cdot(-2) =$

Και σ' αυτή τη σειρά οι μαθητές παρατηρούν ότι στα γινόμενα ο πρώτος παράγοντας είναι σταθερός, το −5, ενώ ο δεύτερος μειώνεται συνεχώς κατά μία θετική μονάδα και πως τα γινόμενα αυξάνονται συνεχώς κατά πέντε θετικές μονάδες, οπότε εύκολα συμπεραίνουν ότι:

$$(-5)\cdot(-1) = +5 \qquad \textit{και} \qquad (-5)\cdot(-2) = +10$$

και ανακαλύπτουν έτσι ότι **το γινόμενο δύο αρνητικών ρητών αριθμών είναι θετικός ρητός αριθμός**.

Στα γινόμενα στις παραπάνω σειρές για ευκολία δίνονται μόνο ακέραιοι αριθμοί. Αυτό καλό είναι να τηρείται στην πρώτη σειρά. Στη δεύτερη σειρά όμως μπορούν να δίνονται οποιοιδήποτε ρητοί αριθμοί όπως, για παράδειγμα, στη σειρά:

$(-2{,}5)\cdot(+2) = -5$
$(-2{,}5)\cdot(+1{,}5) = -3{,}75$
$(-2{,}5)\cdot(+1) = -2{,}5$
$(-2{,}5)\cdot(+0{,}5) = -1{,}25$
$(-2{,}5)\cdot 0 = 0$
$(-2{,}5)\cdot(-0{,}5) =$
$(-2{,}5)\cdot(-1) =$

(Ο πρώτος παράγοντας παραμένει σταθερός, το −2,5, ο δεύτερος μειώνεται σταθερά κατά +0,5 και τα γινόμενα αυξάνονται σταθερά κατά +1,25).

Σημείωση: *Στο σχολικό βιβλίο χρησιμοποιείται το παραπάνω διδακτικό μοντέλο μόνο για την εξαγωγή του γινομένου δύο αρνητικών ρητών αριθμών, ενώ για το γινόμενο δύο ετερόσημων ρητών αριθμών χρησιμοποιούνται γινόμενα που οι παράγοντές τους αναφέρονται σε συγκεκριμένα μεγέθη.*
(*Δείτε* ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ *Μαθηματικών*, ΦΕΚ 303Β/13-03-2003, *σελίδα* 4016).

2. Αναλογικοπροσθετικό μοντέλο

Με το αναλογικοπροσθετικό μοντέλο διδασκαλίας της πράξης του πολλαπλασιασμού στο σύνολο των ρητών αριθμών μεταφέρουμε και στον πολλαπλασιασμό των ρητών αριθμών την ερμηνεία και εκτέλεση του πολλαπλασιασμού με προσθετικό τρόπο. Ενεργοποιούμε δηλαδή τους δύο όρους, τον *πολλαπλασιαστή* και τον *πολλαπλασιαστέο*, τους οποίους μας υπενθυμίζει το παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα: Θεωρούμε το γινόμενο: 4·3,5. Ο τρόπος με τον οποίον προφέρουμε ένα τέτοιο γινόμενο μας παραπέμπει στο ποιος παράγοντας μπορεί να θεωρείται πολλαπλασιαστής και ποιος πολλαπλασιαστέος. Έτσι, αν το πιο πάνω γινόμενο το προφέρουμε "4 φορές το 3,5", τότε ως πολλαπλασιαστής μπορεί να θεωρηθεί ο πρώτος παράγοντας[1], δηλαδή έχουμε:

$$4\cdot 3{,}5 = 3{,}5 + 3{,}5 + 3{,}5 + 3{,}5 = 14,$$

αν όμως το προφέρουμε "το 4 πολλαπλασιάζεται με το 3,5" ή και πιο σύντομα "4 επί 3,5", τότε ως πολλαπλασιαστής μπορεί να θεωρηθεί ο δεύτερος παράγοντας, δηλαδή έχουμε:

$$4\cdot 3{,}5 = 4 + 4 + 4 + 2 = 14.$$

Ακολουθώντας το αναλογικοπροσθετικό μοντέλο για τη διδασκαλία του πολλαπλασιασμού στο σύνολο των ρητών αριθμών μεταφέρουμε το πνεύμα αυτό και στον πολλαπλασιασμό των ρητών αριθμών. Για τη διδασκαλία παίζει σημαντικό ρόλο ο τρόπος παραγωγής των θετικών και αρνητικών αριθμών ως επανάληψη των αντίστοιχων μονάδων, της θετικής (+1) και της αρνητικής (−1). Για παράδειγμα, **το −5 προκύπτει αν ληφθεί 5 φορές η αρνητική μονάδα**, δηλαδή:

$$-5 = 5\cdot(-1) = (-1) + (-1) + (-1) + (-1) + (-1).$$

Για τη διδασκαλία της ενότητας για ευκολία μπορούμε στα γινόμενα να χρησιμοποιούμε ακέραιους παράγοντες και τον πολλαπλασιαστή να τον εξάγουμε από τον πρώτο παράγοντα. Ξεκινάμε τη διαδικασία με την περίπτωση όπου και οι δύο οι παράγοντες είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί, γιατί οι μαθητές, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, διαισθανόμενοι τον ισομορφισμό μεταξύ των μη αρνητικών ακεραίων και των φυσικών αριθμών συμπεραίνουν το αποτέλεσμα και εύκολα το κατανοούν. Για παράδειγμα, αν δοθεί στους μαθητές το γινόμενο (+4)·(+5), οι μαθητές συμπεραίνουν ότι είναι ίσο με +20 αφού γνωρίζουν ότι 4·5 = 20, δηλαδή συμπεραίνουν ότι (+4)·(+5) = +20. Έτσι κατανοούν εύκολα και την παρακάτω ανάλυση, η οποία πρέπει να γίνεται, επειδή βοηθάει και στα επόμενα βήματα.

$$\mathbf{(+4)\cdot(+5)} = [4\cdot(+1)]\cdot(+5) = 4\cdot[(+1)\cdot(+5)] = \mathbf{4\cdot(+5)}$$

$$= (+5) + (+5) + (+5) + (+5) = +20 = +(4\cdot 5).$$

[1] Στην καθημερινή μας ζωή μπορούμε να βρούμε πολλά παραδείγματα που επαληθεύουν αυτή τη διαδικασία.

Μετά από αυτό το παράδειγμα αναμένουμε οι μαθητές σκεπτόμενοι αναλογικά να συμπεραίνουν[2] ότι το γινόμενο **(+4)·(−5)** είναι ίσο με **4·(−5**), δηλαδή:

$$\mathbf{(+4)\cdot(-5) = 4\cdot(-5)} = (-5) + (-5) + (-5) + (-5) = -20 = -(4\cdot 5) \qquad (1).$$

Με παραδείγματα σαν τα παραπάνω οι μαθητές συνειδητοποιούν ότι όταν ο πρώτος παράγοντας είναι θετικός ακέραιος αριθμός, τότε επαναλαμβάνεται ως προσθετέος ο δεύτερος παράγοντας τόσες φορές, όση είναι η απόλυτη τιμή του πρώτου παράγοντα[3].

Στη συνέχεια μελετάμε την περίπτωση όπου ο πρώτος παράγοντας είναι αρνητικός ακέραιος αριθμός. Στη φάση αυτή καλό είναι να δίνουμε για υπολογισμό γινόμενα που δίνονται στο προηγούμενο βήμα, αλλά με αντιμετάθεση των παραγόντων τους, δηλαδή αν στο προηγούμενο βήμα δόθηκε το γινόμενο (+4)·(−5), στη φάση αυτή καλό είναι να δοθεί το γινόμενο[4] (−5)·(+4), όπου σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε:

$$\mathbf{(-5)\cdot(+4)} = [5\cdot(-1)]\cdot(+4) = 5\cdot[(-1)\cdot(+4)] = 5\cdot[(+4)\cdot(-1)] = \mathbf{5\cdot(-4)}$$

$$= (-4) + (-4) + (-4) + (-4) + (-4) = -20 = -(5\cdot 4) \qquad (2).$$

Μελετώντας το παραπάνω παράδειγμα οι μαθητές παρατηρούν ότι:

$$\mathbf{(-5)\cdot(+4) = 5\cdot(-4)},$$

οπότε αναμένουμε αναλογικά να συμπεραίνουν ότι:

$$\mathbf{(-5)\cdot(-4) = 5\cdot(+4)}$$

ή πιο αναλυτικά:

$$\mathbf{(-5)\cdot(-4) = 5\cdot(+4)} = (+4) + (+4) + (+4) + (+4) + (+4) = +20 = +(5\cdot 4).$$

Έτσι οι μαθητές συμπεραίνουν ότι **το γινόμενο δύο αρνητικών ρητών αριθμών είναι θετικός ρητός αριθμός**.

Κλείνοντας τη διδασκαλία της ενότητας ως ανακεφαλαίωση μπορούμε να γράφουμε στον πίνακα και να τονίζουμε όλα τα παραδείγματα που δίνουμε κατά τη διδασκαλία μας στα οποία αποτυπώνεται και η αναλογική σκέψη που κάνουμε, ώστε οι μαθητές να έχουν γενική εικόνα[5] και να αποκτούν έτσι ολική αντίληψη. Δηλαδή, αν κατά τη διδασκαλία μας δόθηκαν τα παραδείγματα που αναφέρονται παραπάνω, μεταφέρουμε στον πίνακα την παρακάτω εικόνα:

---

[2] Σε αντίθετη περίπτωση τους καθοδηγούμε εμείς κατάλληλα, ώστε να το συμπεραίνουν.

[3] Στο σχολικό βιβλίο προτείνεται στους μαθητές να υπολογίσουν δύο τέτοια γινόμενα χωρίς να κάνουν τους πολλαπλασιασμούς. Πιο συγκεκριμένα, τους ζητείται να υπολογίσουν τα γινόμενα:

(+524,5)·(+10) και (–265,4)·(+10).

(Ο πολλαπλασιαστής και στα δύο γινόμενα προκύπτει από τον δεύτερο παράγοντα).

[4] Οι μαθητές συγκρίνοντας τα γινόμενα (1) και (2) και διαισθανόμενοι την αντιμεταθετική ιδιότητα που ισχύει στον πολλαπλασιασμό των ρητών αριθμών πείθονται πιο εύκολα για την ορθότητα της διαδικασίας. Επίσης συνειδητοποιούν ότι **το γινόμενο δύο ετερόσημων ρητών αριθμών είναι αρνητικός ρητός αριθμός**.

[5] Βλέποντας οι μαθητές τη γενική εικόνα συνειδητοποιούν καλύτερα πως το γινόμενο δύο ετερόσημων ρητών αριθμών είναι αρνητικός ρητός αριθμός, δηλαδή ότι ισχύει: (+)·(−) = − και (−)·(+) = − και πως το γινόμενο δύο ομόσημων ρητών αριθμών είναι θετικός ρητός αριθμός, δηλαδή ότι: (+)·(+) = + και (−)·(−) = + .

$$(+4)\cdot(+5) = 4\cdot(+5) = (+5) + (+5) + (+5) + (+5) = +20$$

$$(+4)\cdot(-5) = 4\cdot(-5) = (-5) + (-5) + (-5) + (-5) = -20$$

$$(-5)\cdot(+4) = 5\cdot(-4) = (-4) + (-4) + (-4) + (-4) + (-4) = -20$$

$$(-5)\cdot(-4) = 5\cdot(+4) = (+4) + (+4) + (+4) + (+4) + (+4) = +20$$

Για εποπτική παρουσίαση του μοντέλου αυτού μπορείτε να χρησιμοποιείτε, αν θέλετε, την μικροεφαρμογή GeoGebra:

https://www.geogebra.org/m/sjRN5HjC

που δημιούργησα, η οποία αποσκοπεί στην εύκολη απομνημόνευση του **κανόνα των προσήμων** στον πολλαπλασιασμό των ρητών αριθμών.

3. Αναλυτικό μοντέλο

Θεωρώ ότι αυτό το μοντέλο είναι πρωτότυπο, απλό στην εφαρμογή και πολύ αποτελεσματικό. Κύριο ρόλο για τη διδασκαλία της πράξης του πολλαπλασιασμού στο σύνολο των ρητών αριθμών παίζει ο τρόπος παραγωγής των θετικών και αρνητικών αριθμών. Επίσης, θεμελιώδη ρόλο παίζει και το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού στο σύνολο των ρητών αριθμών, την έννοια του οποίου βοηθάμε τους μαθητές να κατανοούν ελπίζοντας και στη βοήθεια του ισομορφισμού που αναφέρθηκε παραπάνω και διαισθάνονται οι μαθητές. Ενημερώνουμε λοιπόν τους μαθητές ότι όπως το **1** είναι ουδέτερο στοιχείο της πράξης του πολλαπλασιασμού μεταξύ μη προσημασμένων αριθμών αναφέροντας και παραδείγματα, όπως το παρακάτω:

$$\mathbf{7{,}9\cdot 1 = 1\cdot 7{,}9 = 7{,}9}$$

έτσι και το **+1** είναι ουδέτερο στοιχείο της πράξης του πολλαπλασιασμού στο σύνολο των ρητών αριθμών αναφέροντας και εδώ παραδείγματα, όπως τα παρακάτω:

$$\mathbf{(+5{,}3)\cdot(+1) = (+1)\cdot(+5{,}3) = +5{,}3} \quad \& \quad \mathbf{(-9{,}6)\cdot(+1) = (+1)\cdot(-9{,}6) = -9{,}6}.$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού στο σύνολο των ρητών αριθμών για τις δύο μονάδες, τη θετική και την αρνητική. Δηλαδή γράφουμε στον πίνακα:

$$\mathbf{(+1)\cdot(+1) = +1} \quad \text{και} \quad \mathbf{(-1)\cdot(+1) = (+1)\cdot(-1) = -1}.$$

Παρατηρούμε ότι στις τελευταίες σχέσεις περιέχονται τρία από τα τέσσερα γινόμενα της μορφής $\alpha\cdot\beta$, όπου $\alpha, \beta \in \{+1, -1\}$. Τις τιμές αυτών των γινομένων τις κατανοούν εύκολα οι μαθητές, επειδή είναι εξοικειωμένοι με την έννοια του ουδέτερου στοιχείου. Μένει το γινόμενο **(−1)·(−1)**, το οποίο το γράφουμε στον πίνακα και ζητάμε από τους μαθητές να μας πουν με τι νομίζουν ότι ισούται. Οι απαντήσεις που αναμένουμε είναι −1 και +1, διότι οι μαθητές διαισθάνονται ότι η απόλυτη τιμή του γινομένου δύο ρητών αριθμών είναι ίση με το γινόμενο των απόλυτων τιμών των παραγόντων του γινομένου. Μετά από τις απαντήσεις που παίρνουμε ενημερώνουμε τους μαθητές ότι είναι ίσο με **+1**, δηλαδή **(−1)·(−1) = +1** και το αιτιολογούμε ως εξής:

Αν $(-1)\cdot(-1) = -1$, τότε, αφού $(-1)\cdot(+1) = -1$, *θα είχαμε την ισότητα* $(-1)\cdot(-1) = (-1)\cdot(+1)$ *από την οποία διαιρώντας και τα δύο μέλη με το* -1 *θα παίρναμε* $-1 = +1$, το οποίο *προφανώς δεν ισχύει. Άρα* $(-1)\cdot(-1) = +1$.

Οι μαθητές παρατηρούν στην παραπάνω αιτιολόγηση ότι η τιμή του γινομένου $(-1)\cdot(-1)$ προκύπτει ως λογική συνέπεια της ύπαρξης του ουδέτερου στοιχείου του πολλαπλασιασμού και πιστεύω ότι έτσι αποδέχονται και αυτό το γινόμενο.

Τέλος, δίνουμε μια σειρά γινομένων, όπως η παρακάτω, από την οποία εξάγεται ο κανόνας των προσήμων για τον πολλαπλασιασμό των ρητών αριθμών. Είναι αυτονόητο ότι όλες οι ιδιότητες του πολλαπλασιασμού μεταξύ μη προσημασμένων αριθμών θα ισχύουν και στον πολλαπλασιασμό των ρητών αριθμών τις οποίες και χρησιμοποιούμε.

$$\mathbf{(+5)\cdot(+6{,}4)} = [5\cdot(+1)]\cdot[6{,}4\cdot(+1)] = [5\cdot 6{,}4]\cdot[(+1)\cdot(+1)] = 32\cdot(+1) = \mathbf{+32}$$

$$\mathbf{(+5)\cdot(-6{,}4)} = [5\cdot(+1)]\cdot[6{,}4\cdot(-1)] = [5\cdot 6{,}4]\cdot[(+1)\cdot(-1)] = 32\cdot(-1) = \mathbf{-32}$$

$$\mathbf{(-5)\cdot(+6{,}4)} = [5\cdot(-1)]\cdot[6{,}4\cdot(+1)] = [5\cdot 6{,}4]\cdot[(-1)\cdot(+1)] = 32\cdot(-1) = \mathbf{-32}$$

$$\mathbf{(-5)\cdot(-6{,}4)} = [5\cdot(-1)]\cdot[6{,}4\cdot(-1)] = [5\cdot 6{,}4]\cdot[(-1)\cdot(-1)] = 32\cdot(+1) = \mathbf{+32}$$

4. **Φυσικό μοντέλο**

Ένα φυσικό μοντέλο που μπορούμε να χρησιμοποιούμε για τη διδασκαλία της πράξης του πολλαπλασιασμού στο σύνολο των ρητών αριθμών είναι η κίνηση ενός οχήματος σε μια μεγάλη οδό, όπου οι τιμές της ταχύτητας του οχήματος και του χρόνου κίνησής του είναι προσημασμένες και επίσης, η χιλιομέτρηση της οδού έχει γίνει με πρότυπο τον άξονα.

Για την περιγραφή του μοντέλου αυτού και της διαδικασίας γενικότερα μπορείτε να επισκέπτεστε την μικροεφαρμογή GeoGebra που δημιούργησα για αυτόν τον σκοπό στην ηλεκτρονική διεύθυνση:

https://www.geogebra.org/m/NuawRWfa

την οποία μπορείτε να χρησιμοποιείτε ή, αν αυτό είναι αδύνατο, μπορείτε να εφαρμόζετε στον πίνακα τη διαδικασία που περιγράφεται σ' αυτήν.

Οι μαθητές μελετώντας την κίνηση του οχήματος αυτού κατανοούν εύκολα τον κανόνα των προσήμων για την πράξη του πολλαπλασιασμού στο σύνολο των ρητών αριθμών, αφού υπάρχει και η σχετική εποπτεία με συγκεκριμένα μεγέθη. Αξίζει να σημειωθεί ότι κατά τη διδασκαλία μας με αυτό το μοντέλο πρέπει να τονίζουμε στους μαθητές δικαιολογώντας τα πρόσημα των τιμών των μεγεθών ότι οι ρητοί αριθμοί (θετικοί και αρνητικοί) επινοήθηκαν και χρησιμοποιούνται για μεγέθη που επιδέχονται αντίθεση, δηλαδή που μπορούν να βρεθούν σε δύο αντίθετες καταστάσεις, όπου για τη μία χρησιμοποιείται το πρόσημο "+" και για την αντίθετη το πρόσημο "−".

Περιγραφή και σχολιασμός μιας σχετικής δειγματικής διδασκαλίας μου με το φυσικό μοντέλο

Επιτρέψτε μου να μεταφέρω εδώ την προσωπική μου εμπειρία και τις παρατηρήσεις μου σχετικά με μία δειγματική διδασκαλία που πραγματοποίησα στο 4^{ο} Γυμνάσιο Τρίπολης για τον πολλαπλασιασμό των ρητών αριθμών. Η διδασκαλία έγινε με τη βοήθεια του φυσικού μοντέλου στις 4 Μαΐου 2015 στο τμή-

μα Α2 της Α΄ τάξης στη βιβλιοθήκη του σχολείου, όπου υπήρχε ηλεκτρονικός υπολογιστής συνδεδεμένος στο Διαδίκτυο με τη βοήθεια του οποίου προβλήθηκε σε μεγάλη οθόνη η μικροεφαρμογή που αναφέρεται παραπάνω.

Καταρχάς να σημειωθεί ότι η ίδια η μικροεφαρμογή τράβηξε την προσοχή και το ενδιαφέρον των μαθητών. Αυτό είναι το πλεονέκτημα της εποπτείας.

Η διδασκαλία χωρίστηκε σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος έγινε η ψυχολογική και γνωσιολογική προετοιμασία των μαθητών και στο δεύτερο η επεξεργασία των δεδομένων και η εξαγωγή των συμπερασμάτων.

Στο πρώτο μέρος αρχικά αναφέρθηκα γενικά στο σύνολο των ρητών αριθμών όπου έγινε και συζήτηση με τους μαθητές σχετικά με τον ρόλο του προσήμου στην παράσταση ενός ρητού αριθμού και αναφέρθηκαν συγκεκριμένα παραδείγματα. Στη συνέχεια "άνοιξα" τις προαπαιτούμενες γνώσεις της μικροεφαρμογής και έγινε προσπάθεια να κατανοήσουν οι μαθητές ότι στο παράδειγμα που υπάρχει στις προαπαιτούμενες γνώσεις το γινόμενο των τιμών της ταχύτητας και του χρόνου κίνησης του οχήματος δίνει τη θέση του οχήματος στην οδό. Κατόπιν έγινε η παρουσίαση του μοντέλου όπου τονίσθηκε ότι, αφού ως αρχή μέτρησης του χρόνου θεωρείται η στιγμή κατά την οποία το όχημα διέρχεται από την αρχή χιλιομέτρησης της οδού, η θέση του οχήματος στην οδό και στην περίπτωση των προσημασμένων τιμών της ταχύτητας και του χρόνου δίνεται από το γινόμενο των τιμών των δύο αυτών μεγεθών, όπως ακριβώς και στην περίπτωση του παραδείγματος των προαπαιτούμενων γνώσεων.

Στο δεύτερο μέρος έγινε η διδασκαλία της πράξης του πολλαπλασιασμού στο σύνολο των ρητών αριθμών με τη βοήθεια της μικροεφαρμογής στην οποία το πρόσημο του γινομένου καθορίζεται με φυσικό τρόπο.

Παρακάτω παρουσιάζεται η αιτιολόγηση του προσήμου του γινομένου των τιμών της ταχύτητας και του χρόνου όπως διδάχθηκε στους μαθητές με τη σειρά συνδυασμού των προσήμων που ακολουθήθηκε.

1. $(+)\cdot(+)$ (*θετική ταχύτητα και θετικός χρόνος*).

Επειδή η τιμή της ταχύτητας έχει θετικό πρόσημο, το όχημα κινείται προς την θετική κατεύθυνση, δηλαδή προς τα δεξιά και επειδή η τιμή του χρόνου είναι θετική, το όχημα έχει προσπεράσει το Ο. Άρα βρίσκεται δεξιά του Ο.

Σ' αυτή την περίπτωση, για παράδειγμα, το γινόμενο $(+50)\cdot(+2)$ σημαίνει ότι το όχημα βρίσκεται $2\cdot 50 = 100$ χιλιόμετρα δεξιά του Ο, δηλαδή στο σημείο +100 της οδού.

Άρα $(+50)\cdot(+2) = +100 = +(50\cdot 2)$.

2. $(+)\cdot(-)$ (*θετική ταχύτητα και αρνητικός χρόνος*).

Επειδή η τιμή της ταχύτητας έχει θετικό πρόσημο, το όχημα κινείται προς την θετική κατεύθυνση, δηλαδή προς τα δεξιά και επειδή η τιμή του χρόνου είναι αρνητική, το όχημα δεν έχει φτάσει στο Ο. Άρα βρίσκεται αριστερά του Ο.

Σ' αυτή την περίπτωση, για παράδειγμα, το γινόμενο $(+50)\cdot(-2)$ σημαίνει ότι το όχημα βρίσκεται $2\cdot 50 = 100$ χιλιόμετρα αριστερά του Ο, δηλαδή στο σημείο −100 της οδού.

Άρα $(+50)\cdot(-2) = -100 = -(50\cdot 2)$.

3. (−)·(+) (*αρνητική ταχύτητα και θετικός χρόνος*).

Επειδή η τιμή της ταχύτητας έχει αρνητικό πρόσημο, το όχημα κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση, δηλαδή προς τα αριστερά και επειδή η τιμή του χρόνου είναι θετική, το όχημα έχει προσπεράσει το Ο. Άρα βρίσκεται αριστερά του Ο.

Σ' αυτή την περίπτωση, για παράδειγμα, το γινόμενο (−50)·(+2) σημαίνει ότι το όχημα βρίσκεται 2·50 = 100 χιλιόμετρα αριστερά του Ο, δηλαδή στο σημείο −100 της οδού.

Άρα (−50)·(+2) = −100 = −(50·2).

4. (−)·(−) (*αρνητική ταχύτητα και αρνητικός χρόνος*).

Επειδή η τιμή της ταχύτητας έχει αρνητικό πρόσημο, το όχημα κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση, δηλαδή προς τα αριστερά και επειδή η τιμή του χρόνου είναι αρνητική, το όχημα δεν έχει φτάσει στο Ο. Άρα βρίσκεται δεξιά του Ο.

Σ' αυτή την περίπτωση, για παράδειγμα, το γινόμενο (−50)·(−2) σημαίνει ότι το όχημα βρίσκεται 2·50 = 100 χιλιόμετρα δεξιά του Ο, δηλαδή στο σημείο +100 της οδού.

Άρα (−50)·(−2) = +100 = +(50·2).

Όλες οι περιπτώσεις παρουσιάστηκαν με την μικροεφαρμογή για διάφορες τιμές της ταχύτητας και του χρόνου κίνησης του οχήματος, ώστε οι μαθητές να έχουν εποπτική εμπειρία όλων των συνδυασμών των προσήμων στο γινόμενο δύο ρητών αριθμών και να κατανοήσουν έτσι τον κανόνα των προσήμων.

Οι μαθητές, όπως φάνηκε από τις απαντήσεις που μας έδωσαν στις απλές προφορικές ερωτήσεις που τους υποβλήθηκαν, κατανόησαν τον κανόνα. Θεωρώ όμως ότι δεν τον εμπέδωσαν πλήρως και αυτό οφείλεται στον λιγοστό χρόνο που διατέθηκε για τη διδασκαλία. Γι' αυτό προτείνω η διδασκαλία να ολοκληρώνεται σε δύο διδακτικές ώρες. Να διδάσκεται και να αναλύεται κάθε περίπτωση χωριστά δίνοντας ταυτόχρονα με την εποπτική παρουσίαση και μικρές ασκήσεις στους μαθητές για εξάσκηση και εμπέδωση.

Επαναλαμβάνω πως είναι πολύ σημαντικό να κατανοούν οι μαθητές ότι **ο κανόνας των προσήμων στον πολλαπλασιασμό των ρητών αριθμών δεν δίνεται αυθαίρετα, αλλά επιβάλλεται από άλλους λογικούς και μαθηματικούς κανόνες** και αυτό επιβεβαιώνεται και από τις εφαρμογές. Έτσι θα τον εμπεδώνουν πλήρως και θα τον εφαρμόζουν συνειδητά και όχι μηχανικά.

Το παράδειγμα της μικροεφαρμογής θεωρώ πως είναι πολύ καλό για να κατανοούν οι μαθητές με συγκεκριμένους αριθμούς τον κανόνα των προσήμων στο γινόμενο δύο ρητών αριθμών και κυρίως την περίπτωση όπου και οι δύο οι παράγοντες είναι αρνητικοί αριθμοί.

Στην Β΄ τάξη η μικροεφαρμογή αυτή μπορεί να παρουσιαστεί ως ένα παράδειγμα εφαρμογής του πολλαπλασιασμού ρητών αριθμών. Για τους μαθητές της τάξης αυτής θα είναι πιο εύκολη η κατανόηση, γιατί έχουν και αντίστοιχες γνώσεις φυσικής.

Κλείνοντας αξίζει να αναφερθεί πως η χρήση **συγκεκριμένων αριθμών** είναι ο καλύτερος τρόπος για να διδάσκονται σε μαθητές της Α΄ Γυμνασίου οι πράξεις στο σύνολο των ρητών αριθμών και περισσότερο ο πολλαπλασιασμός λόγω του δυσνόητου για τους μαθητές κανόνα των προσήμων. Αυτό γιατί με την εμπειρία που αποκτούν οι μαθητές χρησιμοποιώντας μεγέθη από την καθημερινή ζωή μπορούν πιο εύκολα να υπερπηδούν το επιστημολογικό εμπόδιο

που δημιουργεί η έννοια του προσήμου. Μια τέτοια διδακτική πρόταση με πολλά παραδείγματα επιχειρείται και στη δημοσιευμένη εργασία μου στο περιοδικό της Ε.Μ.Ε. "Ευκλείδης γ΄", τ. 74 (2011), την οποία μπορείτε να βρείτε και στην ηλεκτρονική διεύθυνση:

http://users.sch.gr/PTheodoropoulos/ergasies/didakt-praepopt2.pdf

Τέλος, μπορείτε να βρείτε και άλλες σχετικές διδακτικές προτάσεις στο *«Βιβλίο του Εκπαιδευτικού για τα Μαθηματικά της Α΄ Γυμνασίου»* των Ι. Βανδουλάκη – Χ. Καλλιγά – Ν. Μαρκάκη και Σ. Φερεντίνου. Ο.Ε.Δ.Β. (2007).