Μη Συμβατικά Θεμέλια της Ασαφούς Πιθανοθεωρίας και της Στατιστικής Ασαφών Δεδομένων

(Διδακτορική Διατριβή του Παναγιώτη Λ. Θεοδωρόπουλου, Πάτρα 1995)

Π ε ρ ί λ η ψ η

Ο καθηγητής του Πανεπιστημίου Πατρών Δρόσος Κωνσταντίνος είχε την ιδέα πως η ασάφεια θα μπορούσε να εκφρασθεί καλύτερα με τη βοήθεια της Μη Συμβατικής Θεωρίας και της Θεωρίας των Μπουλιανών Μοντέλων. Προς τούτο ξεκίνησε ο ίδιος μαζί με τους συνεργάτες του μία σοβαρή ερευνητική δραστηριότητα. Η έρευνα αυτή συνεχίσθηκε και στην παρούσα διατριβή, της οποίας κύριος σκοπός είναι η εφαρμογή της ασάφειας όπως διαμορφώθηκε με τις νέες αντιλήψεις (IB-ασάφεια) στη Θεωρία Πιθανοτήτων και Στατιστική, τομείς με τους οποίους δεν ασχολήθηκαν οι προηγούμενοι. Πέραν όμως από αυτόν τον σκοπό διατυπώθηκαν και αποδείχθηκαν για πρώτη φορά κάποια θεωρήματα, τα οποία αφορούν στην IB-ασάφεια.

Αρχικά στη διατριβή αναλύεται η έννοια της IB-ασάφειας σε αντιδιαστολή με την κλασική ασαφή θεωρία που εισήχθη από τον Zadeh το 1965. Η βασική ιδέα για τον ορισμό των κλασικών ασαφών συνόλων υπήρξε η γενίκευση της χαρακτηριστικής ή δείκτριας συνάρτησης $I_A:\ X \to \{0, 1\}$ ενός υποσυνόλου A του X (βασικό σύνολο) σε μία συνάρτηση της μορφής $f\ :\ X\ \to\ [0, 1]$. Για την δημιουργία όμως του μοντέλου της IB-ασάφειας, το σύνολο $\{0, 1\}$ αντιμετωπίζεται ως η τετριμμένη άλγεβρα Boole, αφού οι πράξεις μεταξύ των συνόλων ορίζονται σύμφωνα με τις αντίστοιχες λογικές πράξεις και επομένως η χαρακτηριστική συνάρτηση I_A γενικεύεται σε μία συνάρτηση της μορφής $f\ :\ X\ \to\ IB$, όπου IB μία γενικότερη πλήρης άλγεβρα Boole. Η λογική που ακολουθείται στην IB-ασάφεια όπως είναι φυσικό είναι πλειότιμη. Δηλαδή η τιμή αλήθειας που μπορεί να πάρει μια λογική πρόταση p (συμβολικά $\|p\|$) δεν είναι μόνο 0 ή 1 όπως στη δίτιμη λογική, αλλά οποιοδήποτε στοιχείο μιας γενικότερης άλγεβρας Boole IB.

Στη συνέχεια θεμελιώνονται οι IB-ασαφείς πραγματικοί αριθμοί διακριτοί και μη. Οι διακριτοί IB-ασαφείς πραγματικοί αριθμοί ορίζονται ως τα στοιχεία του συνόλου:

$$IR[IB] = \left\{ f \in IB^{IR} : \big(\forall x, y \in IR\big)\big[x \neq y \to f(x) \wedge f(y) = 0_{IB}\big] \ \text{ και } \bigvee_{x \in IR} f(x) = 1_{IB} \right\}.$$

Αν r είναι μία διμελής σχέση στο σύνολο IR, τότε αυτή η σχέση στη δομή του $IR[IB]$ μεταφέρεται πλειότιμα ως εξής:

$$\left\| r(f,g) \right\| := \bigvee_{\substack{x,\, y \in IR: \\ \mathrm{r}(x,\, y)}} \left(f(x) \wedge g(y) \right) \quad (1)$$

Έτσι δημιουργείται η δομή του συνόλου *IR*[*IB*], η οποία λέγεται Δύναμη Boole (Boolean Power) και είναι πλειότιμη.

Για να μπορούμε όμως να έχουμε και ποσοτικά στοιχεία, πέρα από τα ποιοτικά, στην έκφραση της IB-ασάφειας, ως άλγεβρα Boole *IB* επιλέγεται και χρησιμοποιείται η άλγεβρα Boole μιας πιθανοάλγεβρας (*IB*, *p*), η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη της αριθμήσιμης αλυσίδας. Γι’ αυτό οι τιμές μιας συνάρτησης *f* του συνόλου *IR*[*IB*] που είναι διάφορες του 0_{IB} είναι το πολύ αριθμήσιμου πλήθους και έτσι δημιουργείται το σύνολο των διακριτών IB-ασαφών πραγματικών αριθμών, το οποίο το συμβολίζουμε με το σύμβολο *IR*[*IB*]. Με την πλήρωση του συνόλου *IR*[*IB*] προκύπτουν οι μη διακριτοί IB-ασαφείς πραγματικοί αριθμοί. Το σύνολο όλων των IB-ασαφών πραγματικών αριθμών το συμβολίζουμε με το σύμβολο $IR^{\#}$. Η θεμελίωση του συνόλου των IB-ασαφών πραγματικών αριθμών ολοκληρώνεται με τον ορισμό της συνάρτησης του συμβατικού μέρους με την οποία κάθε IB-ασαφής πραγματικός αριθμός προβάλλεται στο σύνολο *IR* των πραγματικών αριθμών.

Μία βασική πρωτοτυπία της διατριβής αποτελεί το **Μπουλιανό μη Συμβατικό Πλαίσιο** που δημιουργείται σύμφωνα με την παρακάτω περιγραφή. Εντός του πλαισίου αυτού η μελέτη της IB-ασάφειας γίνεται πιο εύκολα και αυτός είναι ο σκοπός της δημιουργίας του.

Όλα τα μαθηματικά αντικείμενα που σχετίζονται με το σύνολο των πραγματικών αριθμών (σύνολα, συναρτήσεις κλπ.) ανήκουν στην υπερδομή *V*(*IR*), η οποία έχει ως σύνολο βάσης το *IR* και επαγωγικά ορίζεται ως εξής:

$$V_0(IR) := IR$$

$$V_{\kappa+1}(IR) := V_\kappa(IR) \cup P\left(V_\kappa(IR)\right),\ \forall \kappa \in IN$$

και

$$V(IR) := \bigcup_{n \in IN} V_n(IR)$$

Οι ατομικοί τύποι της υπερδομής *V*(*IR*) είναι οι τύποι της ισότητας “=” και του ανήκειν “$\in$” και η λογική που ακολουθεί η υπερδομή *V*(*IR*) είναι η δίτιμη.

Όμοια, όλα τα IB-ασαφή μαθηματικά αντικείμενα που σχετίζονται με τους IB-ασαφείς πραγματικούς αριθμούς ανήκουν στην υπερδομή $V^{(IB)}(IR^{\#})$, η οποία επαγωγικά ορίζεται ως εξής:

$$V_0^{(IB)}(IR^{\#}) := IR^{\#}$$

$$V_{n+1}^{(IB)}(IR^{\#}) := \left\{ f : Fun(f) \text{ με } dom(f) \subseteq \bigcup_{\kappa=0}^{n} V_\kappa^{(IB)}(IR^{\#}) \text{ και } ran(f) \subseteq IB \right\}, \forall n \in IN$$

και

$$V^{(IB)}(IR^{\#}) := \bigcup_{n \in IN} V_n^{(IB)}(IR^{\#}).$$

Η υπερδομή $V^{(IB)}(IR^{\#})$ είναι πλειότιμη και οι τιμές αλήθειας για τους ατομικούς τύπους της ισότητας “=” και του ανήκειν “$\in$” ορίζονται ως εξής:

- Για την ισότητα στο σύνολο $IR^{\#}$ σύμφωνα με την (1), ενώ στο $V^{(IB)}(IR^{\#})$ - $IR^{\#}$ σύμφωνα με τον τύπο:

$$\|f = g\| := \left(\bigwedge_{x \in dom(f)} \left(f(x) \Rightarrow \|x \in g\| \right) \right) \wedge \left(\bigwedge_{x \in dom(g)} \left(g(x) \Rightarrow \|x \in f\| \right) \right)$$

- Για τον ατομικό τύπο του ανήκειν “$\in$” με τον τύπο:

$$\|x \in f\| := \bigvee_{y \in dom(f)} \left(f(y) \wedge \|x = y\| \right).$$

Η υπερδομή $V(IR)$ εμφυτεύεται στοιχειωδώς στην υπερδομή $V^{(IB)}(IR^{\#})$ με κύριο χαρακτηριστικό την **Αρχή Μεταφοράς** σύμφωνα με την οποία μεταφέρονται τύποι και προτάσεις από την υπερδομή $V(IR)$ στην υπερδομή $V^{(IB)}(IR^{\#})$. Η εμφύτευση της υπερδομής $V(IR)$ στην υπερδομή $V^{(IB)}(IR^{\#})$ επιτυγχάνεται ως εξής:

Βοηθητικά ορίζεται η ενδιάμεση δομή των Φραγμένων Δυνάμεων Boole όλων των επιπέδων της υπερδομής $V(IR)$. Δηλαδή ορίζεται το σύνολο:

$$W := \bigcup_{n \in IN} V_n(IR)[IB]$$

όπου οι τιμές αλήθειας για τους ατομικούς τύπους της ισότητας “=” και του ανήκειν “$\in$” ορίζονται ως εξής:

$$\|A = B\| := \bigvee_{\substack{x \in dom(A), y \in dom(B): \\ x = y}} \left(A(x) \wedge B(y) \right)$$

και

$$\|x \in A\| := \bigvee_{\substack{y \in dom(x), Z \in dom(A): \\ y \in Z}} \left(x(y) \wedge A(Z) \right)$$

Η υπερδομή $V(IR)$ εμφυτεύεται στοιχειωδώς στη δομή W, δηλαδή αν

$$i : V(IR) \hookrightarrow W$$

είναι η στοιχειώδης εμφύτευση, τότε για κάθε τύπο $\varphi(x_1, ..., x_\nu)$ της $V(IR)$ και $\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu$ στοιχεία της $V(IR)$ η λογική πρόταση $\varphi(\alpha_1, ..., \alpha_\nu)$ είναι αληθής στην $V(IR)$ εάν και μόνο εάν η λογική πρόταση $\varphi_W(i(\alpha_1), ..., i(\alpha_\nu))$ είναι αληθής στην W, δηλαδή έχει τιμή αλήθειας ίση με 1_{IB}.

Επίσης, αποδεικνύεται (θεώρημα 4.4.3 της διατριβής) ότι υπάρχει μία εμφύτευση:

$$m_{IB} : W \hookrightarrow V^{(IB)}(IR^{\#})$$

της δομής W στην υπερδομή $V^{(IB)}(IR^{\#})$, η οποία διατηρεί τις τιμές αλήθειας των ατομικών τύπων (και επαγωγικά όλων των τύπων), δηλαδή ισχύουν οι ισότητες:

$$\|x \in A\| = \|m_{IB}(x) \in m_{IB}(A)\|$$

και

$$\|A = B\| = \|m_{IB}(A) = m_{IB}(B)\|$$

Σημειώνεται ότι στις παραπάνω ισότητες οι τιμές αλήθειας του πρώτου μέλους ορίζονται στη δομή W, ενώ του δεύτερου στην υπερδομή $V^{(IB)}(IR^{\#})$.

Η σύνθεση της εμφύτευσης $\boldsymbol{i}$ με την $\boldsymbol{m_{IB}}$ δίνει την φραγμένη στοιχειώδη εμφύτευση:

$$\sharp : V(IR) \hookrightarrow V^{(IB)}(IR^{\#})$$

της υπερδομής $V(IR)$ στην υπερδομή $V^{(IB)}(IR^{\#})$ και δημιουργείται έτσι το Μπουλιανό μη Συμβατικό Πλαίσιο που αναφέραμε παραπάνω.

Τέλος (κεφ. 5 και 6), το Μπουλιανό μη Συμβατικό Πλαίσιο που δημιουργείται χρησιμοποιείται για την μελέτη της IB-ασάφειας στη Θεωρία Πιθανοτήτων και Στατιστική και διαφαίνεται έτσι η δυναμική του καθώς και η χρησιμότητά του, αφού, σύμφωνα με την Αρχή Μεταφοράς που το χαρακτηρίζει, γίνεται μεταφορά τύπων και προτάσεων (χώροι πιθανοτήτων, εκτιμητές, έλεγχοι υποθέσεων κλπ.) από τα συμβατικά Μαθηματικά στα μη συμβατικά που εδώ εκφράζονται με την IB-ασάφεια.