Η εκφώνηση μιας άσκησης

Δρ. Παναγιώτης Λ. Θεοδωρόπουλος
πρώην Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03
e-mail@p-theodoropoulos.gr

Εισαγωγή

Στην εργασία αυτή φαίνεται καθαρά με τη βοήθεια ενός παραδείγματος η σημασία του τρόπου διατύπωσης μιας άσκησης. Το παράδειγμα είναι μία άσκηση που έδωσε συνάδελφος για λύση σε μαθητές σχολείου της περιοχής ευθύνης μου για την οποία εδόθησαν δύο λύσεις φαινομενικά ορθές αλλά με διαφορετικά συμπεράσματα, γεγονός που, όπως είναι φυσικό, προκάλεσε προβληματισμό στον συνάδελφο.

Η άσκηση και η λύση της

Σε επιμορφωτική συνάντηση, συνάδελφος ανέφερε ότι έδωσε στους μαθητές της Α΄ Λυκείου στο μάθημα της Άλγεβρας να λύσουν στο σπίτι την παρακάτω άσκηση:

Άσκηση: *Δίνεται η εξίσωση*:

$$x^2 + \alpha x + \beta = 0,\ \ \textit{όπου}\ \ \alpha, \beta \in IR.$$

Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων α και β, οι οποίες (και οι δύο) είναι και λύσεις αυτής της εξίσωσης.

Όπως ανέφερε ο συνάδελφος, οι περισσότεροι μαθητές έδωσαν την παρακάτω λύση[1] (Λύση 1):

[1] Οι δύο λύσεις που παρουσιάζονται εδώ δεν διατυπώθηκαν ακριβώς έτσι από τους μαθητές, διότι οι μαθητές της Α΄ Λυκείου δεν θα μπορούσαν να αποδώσουν τις λύσεις με αυτόν τον τρόπο, αφού η έννοια των ισοδύναμων συστημάτων διδάσκεται στη Β΄ τάξη. Απλώς εδώ για λόγους κομψότητας επιλέχτηκε αυτός ο τρόπος παρουσίασης των λύσεων. Όμως, το πνεύμα και στις δύο λύσεις είναι το ίδιο με το πνεύμα των λύσεων των μαθητών. Η πρώτη λύση στηρίζεται στους τύπους του Vieta, ενώ η δεύτερη στην επαλήθευση. Επίσης, αξίζει να σημειωθεί ότι για τυπικούς λόγους θα μπορούσε η άσκηση αυτή να μην δοθεί σε μαθητές της Α΄ Λυκείου για λύση, επειδή δεν έχουν διδαχθεί την επίλυση μη γραμμικών συστημάτων. Δοθέντος όμως ότι έχουν διδαχθεί στη Γ΄ Γυμνασίου την μέθοδο της αντικατάστασης για την επίλυση γραμμικών συστημάτων, πιστεύω πως αυτενεργώντας οι μαθητές θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν την μέθοδο αυτή και για την επίλυση των μη γραμμικών συστημάτων που προκύπτουν.

<u>*Λύση* 1</u>

Αφού οι τιμές των παραμέτρων α και β είναι ρίζες της δοθείσας εξίσωσης, η οποία είναι δευτέρου βαθμού, σύμφωνα με τους τύπους του Vieta θα ισχύουν οι σχέσεις:

$$\alpha + \beta = -\alpha \quad \text{και} \quad \alpha\beta = \beta.$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\alpha \\ \alpha\beta = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2\alpha \\ \alpha(-2\alpha) = -2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2\alpha \\ -2\alpha(\alpha - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2\alpha \\ \alpha = 0 \;\text{ ή }\; \alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -2 \end{cases}$$

Άρα υπάρχουν δύο ζεύγη τιμών των α και β που επαληθεύουν το πρόβλημα. Το πρώτο είναι το (α, β) = (0, 0) με αντίστοιχη εξίσωση την $x^2 = 0$, η οποία έχει το 0 ως διπλή ρίζα και το δεύτερο το (α, β) = (1, −2) με αντίστοιχη εξίσωση την $x^2 + x - 2 = 0$, της οποίας οι ρίζες είναι οι $x_1 = 1$ και $x_2 = -2$.

Μία μαθήτρια, όμως, ανέφερε ο συνάδελφος, είχε βρει και ένα τρίτο ζεύγος τιμών ως λύση. Η μαθήτρια αυτή για την παραπάνω άσκηση παρουσίασε την λύση που ακολουθεί (Λύση 2):

<u>*Λύση* 2</u>

Αφού οι τιμές των παραμέτρων α και β είναι ρίζες της δοθείσας εξίσωσης θα την επαληθεύουν, δηλαδή θα ισχύουν οι σχέσεις:

$$\alpha^2 + \alpha\alpha + \beta = 0 \quad \text{και} \quad \beta^2 + \alpha\beta + \beta = 0\,.$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{cases} \alpha^2+\alpha\alpha+\beta=0 \\ \beta^2+\alpha\beta+\beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha^2+\beta=0 \\ \beta^2+\alpha\beta+\beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-2\alpha^2 \\ (-2\alpha^2)^2+\alpha(-2\alpha^2)-2\alpha^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-2\alpha^2 \\ 4\alpha^4-2\alpha^3-2\alpha^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-2\alpha^2 \\ 2\alpha^2(2\alpha^2-\alpha-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-2\alpha^2 \\ \alpha(2\alpha^2-\alpha-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-2\alpha^2 \\ \alpha=0 \ \text{ή} \ 2\alpha^2-\alpha-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-2\alpha^2 \\ \alpha=0 \ \text{ή} \ \alpha=1 \ \text{ή} \ \alpha=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=0 \end{cases} \ \text{ή} \ \begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=-2 \end{cases} \ \text{ή} \ \begin{cases} \alpha=-\dfrac{1}{2} \\ \beta=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Άρα υπάρχουν τρία ζεύγη τιμών των α και β που επαληθεύουν το πρόβλημα. Το πρώτο είναι το (α, β) = (0, 0) με αντίστοιχη εξίσωση την $x^2 = 0$, η οποία έχει το 0 ως διπλή ρίζα, το δεύτερο το (α, β) = (1, −2) με αντίστοιχη εξίσωση την $x^2 + x - 2 = 0$, της οποίας οι ρίζες είναι οι $x_1 = 1$ και $x_2 = -2$ και το τρίτο το $(\alpha,\ \beta)=\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ με αντίστοιχη εξίσωση την $x^2-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}=0$ της οποίας μία ρίζα είναι ο αριθμός $x_1=-\dfrac{1}{2}$.

Ο προβληματισμός του συνάδελφου ήταν ποια από τις δύο λύσεις είναι η ορθή.

Φαινομενικά είμαστε μπροστά σε ένα παράδοξο!
Έχουμε μία άσκηση με δύο διαφορετικές λύσεις!
Μπορεί να συμβαίνει αυτό;
Ασφαλώς και όχι!
Πού είναι λοιπόν το πρόβλημα;

Επειδή εσωτερικά οι δύο λύσεις δεν έχουν λογικά ή υπολογιστικά λάθη, θα αναζητήσουμε την απάντηση στην αφετηρία των λύσεων σε σχέση με την εκφώνηση της άσκησης.

Παρατηρούμε ότι στην πρώτη λύση και στις δύο πρώτες περιπτώσεις της δεύτερης οι τιμές των α και β είναι οι μοναδικές ρίζες της εξίσωσης, ενώ στην τρίτη περίπτωση της δεύτερης λύσης εκτός από τις τιμές των α και β η εξίσωση έχει και άλλη ρίζα, το 1. Θα πρέπει λοιπόν στην εκφώνηση της άσκησης να φαίνεται αν οι τιμές των α και β είναι ή όχι οι μόνες ρίζες της εξίσωσης. Είναι προφανές ότι στην πρώτη περίπτωση αντιστοιχεί η λύση 1 και στη δεύτερη η λύση 2. Από τον τρόπο που είναι διατυπωμένη εδώ η άσκηση δεν προκύπτει ότι οι τιμές των α και β είναι οι μόνες ρίζες της εξίσωσης, αλλά απλώς ότι είναι ρίζες. Άρα δεκτός τρόπος λύσης είναι ο δεύτερος. Θα ήταν δεκτή η πρώτη λύση, αν η άσκηση είχε διατυπωθεί ως εξής:

Άσκηση: *Δίνεται η εξίσωση*:

$$x^2 + \alpha x + \beta = 0, \ \text{όπου} \ \alpha, \beta \in IR.$$

Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων α και β, οι οποίες (και οι δύο) είναι και οι λύσεις αυτής της εξίσωσης.

Με το οριστικό άρθρο "**οι**" δηλώνεται ότι οι τιμές των α και β είναι οι μόνες ρίζες της εξίσωσης και συνεπώς δεν υπάρχει άλλη ρίζα.

Σημείωση: Εννοείται ότι οι παραπάνω τρόποι διατύπωσης της άσκησης δεν είναι και οι μοναδικοί. Μπορεί ο καθένας να διατυπώσει την άσκηση με τον δικό του τρόπο ανάλογα με το τι θέλει να ισχύει.

Συμπέρασμα

Από τα παραπάνω πιστεύω πως έγινε φανερό πόσο σημαντικό ρόλο παίζει ο τρόπος διατύπωσης μιας άσκησης. Γενικά, όταν διατυπώνουμε μία άσκηση πρέπει να προσέχουμε τα εξής:

1. Η εκφώνηση να μην είναι μακροσκελής.
2. Να μην υπάρχουν συντακτικά ή γλωσσικά λάθη.
3. Ο λόγος μας να είναι ποιοτικός, λιτός και κατανοητός.
4. Να μην υπάρχουν ασάφειες στο κείμενο και στο συμβολισμό.
5. Να καθορίζονται με ακρίβεια και σαφήνεια τα δεδομένα και τα ζητούμενα καθώς και τα σύνολα τιμών των μεταβλητών και των παραμέτρων.

Με απλά λόγια η εκφώνηση μιας άσκησης θα πρέπει να χαρακτηρίζεται από λιτότητα, σαφήνεια και ακρίβεια.

Σχόλιο: Θεωρώ ότι η διατύπωση της άσκησης που δόθηκε στους μαθητές για λύση έχει τα παραπάνω χαρακτηριστικά. Όμως, όπως είδαμε, μια παρερμηνεία οδήγησε σε λανθασμένη λύση. Γι' αυτό καλό είναι, όταν χρειάζεται, να δίνονται κάποιες επεξηγήσεις στους μαθητές είτε γραπτά είτε προφορικά, ώστε να μην παρατηρούνται λανθασμένες λύσεις λόγω παρερμηνειών.