Τρία συνηθισμένα λάθη που κάνουν μαθητές της Γ΄ Λυκείου σε ασκήσεις του Διαφορικού Λογισμού

Δρ. Παναγιώτης Λ. Θεοδωρόπουλος
πρώην Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03
e-mail@p-theodoropoulos.gr

Πρόλογος

Στην εργασία αυτή επισημαίνονται και αναλύονται με παραδείγματα και σχόλια τρία συνηθισμένα λάθη που γίνονται από μαθητές της Γ΄ Λυκείου σε ασκήσεις του Διαφορικού Λογισμού. Τα λάθη αυτά εντοπίζονται στην παραγώγιση μιας συνάρτησης πολλαπλού τύπου, στην εφαρμογή των κανόνων de L' Hospital και στην παραγώγιση της τετραγωνικής ρίζας μιας συνάρτησης.

Επειδή στα λάθη αυτά παρατηρείται μεγάλη συχνότητα και επειδή είναι βασικά, δηλαδή σχετίζονται με την άμεση εφαρμογή της θεωρίας, έκρινα πως θα ήταν χρήσιμο και ωφέλιμο να μελετηθούν και να αναλυθούν. Για αυτόν τον λόγο γράφτηκε η παρούσα εργασία, η οποία έχει σαν σκοπό την ενημέρωση και τον προβληματισμό, ώστε να τονίζονται αυτά τα σημεία κατά την διδασκαλία και να αποφεύγονται έτσι τα λάθη που παρατηρούνται στοχεύοντας στην βαθύτερη εμπέδωση της αντίστοιχης θεωρίας από τους μαθητές.

Α. Παράγωγος συνάρτησης πολλαπλού τύπου

Θα μελετήσουμε την περίπτωση μέσα από ένα **παράδειγμα (1)**.
Έχει παρατηρηθεί ότι όταν δίνουμε στους μαθητές της Γ΄ Λυκείου μια συνάρτηση πολλαπλού τύπου, η οποία στα συνοριακά της σημεία ορίζεται με τον έναν από τους δύο τύπους με τους οποίους ορίζεται εκατέρωθεν αυτών, όπως π.χ. η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} 1-\sigma\upsilon\nu x, & x<0 \\ \\ 2x^3-x^2+1, & x\geq 0 \end{cases}$$

και τους ζητάμε να βρουν την παράγωγό της, τότε πολλοί μαθητές για τα συνοριακά σημεία δεν κάνουν ειδικό έλεγχο, αλλά θεωρούν ότι η παράγωγος της συνάρτησης σε αυτά τα σημεία δίνεται από την παράγωγο του αντίστοιχου τύπου. Δηλαδή για την παραπάνω συνάρτηση δίνουν:

$$f'(x)=\begin{cases} \eta\mu x, & x<0 \\ \\ 6x^2-2x, & x\geq 0 \end{cases}$$

Οι μαθητές αυτοί δεν έχουν συνειδητοποιήσει ότι μια συνάρτηση f πολλαπλού τύπου είναι παραγωγίσιμη σε ένα συνοριακό της σημείο x_o εάν υπάρχουν στο

IR τα όρια: $\lim\limits_{x\to x_o^-}\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ και $\lim\limits_{x\to x_o^+}\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ και είναι ίσα.

Άλλοι πάλι μαθητές για να εξετάσουν αν μια συνάρτηση f πολλαπλού τύπου είναι παραγωγίσιμη σε ένα συνοριακό της σημείο x_o στο οποίο ορίζεται ενεργούν ως εξής:
Αρχικά βρίσκουν τις παραγώγους συναρτήσεις στα πλευρικά διαστήματα του x_o (ανοικτά στο x_o) στα οποία ορίζεται η f και είναι παραγωγίσιμη. Δηλαδή για την παραπάνω συνάρτηση βρίσκουν τις παραγώγους:

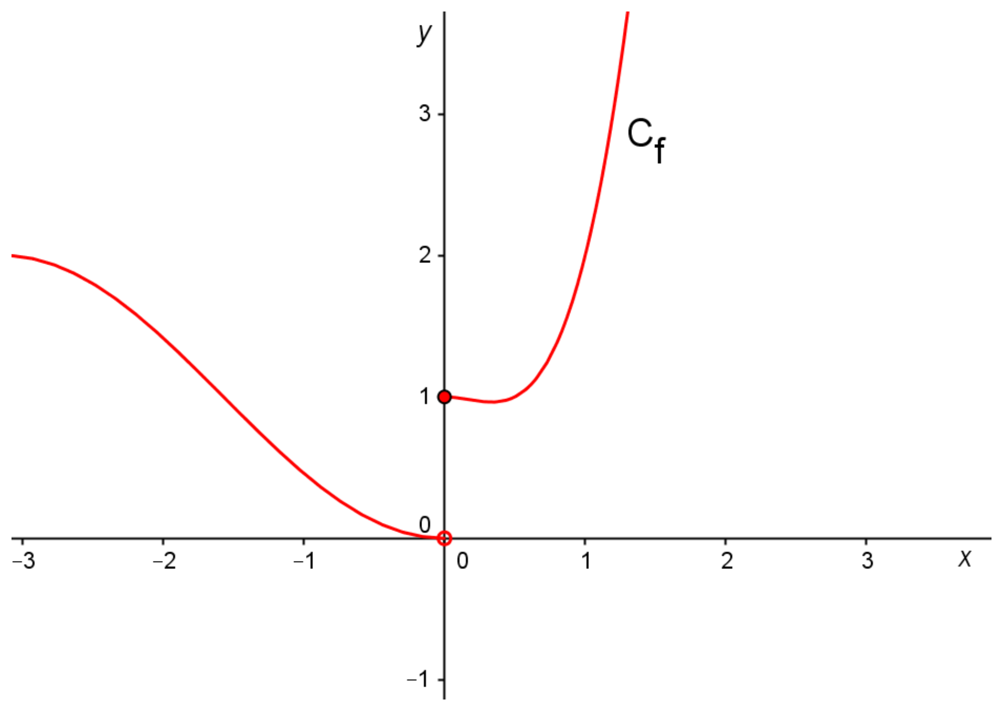
$$f'(x)=\eta\mu x,\ x<0 \qquad \text{και} \qquad f'(x)=6x^2-2x,\ x>0.$$

Στη συνέχεια βρίσκουν (αν υπάρχουν) τα όρια των παραγώγων αυτών στο x_o. Δηλαδή για τη συνάρτηση που μελετάμε βρίσκουν:

$$\lim_{x\to 0^-}f'(x)=\lim_{x\to 0^-}\eta\mu x=0 \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to 0^+}f'(x)=\lim_{x\to 0^+}(6x^2-2x)=0.$$

Αν τα δύο όρια υπάρχουν στο *IR* και είναι ίσα, τότε συμπεραίνουν ότι η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη και στο x_o, διαφορετικά όχι. Δηλαδή για την παραπάνω συνάρτηση συμπεραίνουν ότι $f'(0)=0$.

Είναι φανερό ότι ο τρόπος συμπερασμού και στις δύο περιπτώσεις δεν είναι σωστός. Αυτό φαίνεται καθαρά και από τη συνάρτηση που μελετάμε, η οποία, όπως μπορούμε να δούμε και από την γραφική της παράσταση που ακολουθεί[1], δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, αφού δεν είναι συνεχής στο σημείο αυτό.



Οι μαθητές που κάνουν το δεύτερο λάθος νομίζω ότι παρασύρονται από το εξής:

[1] Καλό είναι όταν είναι εφικτό να υποστηρίζουμε τα συμπεράσματα και εποπτικά, διότι η εποπτεία διεγείρει την ενόραση και η ενόραση βοηθά πολύ στην κατανόηση των εννοιών και των σχέσεων.

Τυχαίνει να έχουν λύσει ασκήσεις με συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει αυτό που κάνουν και έτσι το γενικεύουν.
Η διαδικασία που ακολουθούν οι μαθητές αυτοί δίνει σωστό αποτέλεσμα εάν επιπλέον η συνάρτηση είναι και συνεχής στο x_o, δηλαδή εφαρμόζεται στην ουσία το παρακάτω θεώρημα, το οποίο όμως οι μαθητές δεν γνωρίζουν γιατί δεν διδάσκεται.

Θεώρημα[2]: Έστω μία συνάρτηση f, η οποία ορίζεται σε ένα διάστημα Δ και για ένα εσωτερικό σημείο x_o του Δ υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(x_o-\delta, x_o)$ και $(x_o, x_o+\delta)$. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_o και υπάρχουν στο IR τα όρια $\lim\limits_{x\to x_o^-} f'(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_o^+} f'(x)$ και είναι ίσα, τότε η f είναι παραγωγίσιμη και στο x_o με $f'(x_o) = \lim\limits_{x\to x_o} f'(x)$.

Απόδειξη

Επειδή η f είναι συνεχής στο x_o, εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των ορίων στα όρια:

$$\lim_{x\to x_o^-} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to x_o^+} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$$

προκύπτει απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$.

Επειδή υπάρχουν τα όρια: $\lim\limits_{x\to x_o^-} f'(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_o^+} f'(x)$, σύμφωνα με τον κανόνα de L' Hospital παίρνουμε:

$$\lim_{x\to x_o^-} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \lim_{x\to x_o^-} f'(x) \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to x_o^+} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \lim_{x\to x_o^+} f'(x).$$

Τέλος, επειδή τα όρια: $\lim\limits_{x\to x_o^-} f'(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_o^+} f'(x)$ είναι ίσα και πραγματικοί αριθμοί έχουμε:

$$\lim_{x\to x_o^-} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \lim_{x\to x_o^+} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \in IR.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο x_o με $f'(x_o) = \lim\limits_{x\to x_o} f'(x)$. □

Αν για μία συνάρτηση f ικανοποιείται η υπόθεση του παραπάνω θεωρήματος, τότε όπως προκύπτει και από το συμπέρασμα του θεωρήματος αυτού η παράγωγος f' της συνάρτησης f είναι συνεχής στο x_o. Αν λοιπόν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε μια περιοχή ενός σημείου x_o του πεδίου ορισμού της και η f' δεν είναι συνεχής στο x_o, τότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_o} f'(x)$. Συνεπώς στο πα-

[2] Το θεώρημα αυτό το διατύπωσα και το απόδειξα με αυτόν τον τρόπο για να το προσαρμόσω στις συναρτήσεις πολλαπλού τύπου που μελετάμε. Μια γενική διατύπωση του θεωρήματος αυτού μπορείτε να βρείτε στο βιβλίο του Δημητρίου Α. Κάππου: *Μαθήματα Αναλύσεως - Απειροστικός Λογισμός*, τεύχος Α΄, σελίδα 531 (Αθήνα 1962).

ραπάνω θεώρημα η ύπαρξη του $\lim\limits_{x\to x_o} f'(x)$ αποτελεί μόνο ικανή συνθήκη για την ύπαρξη της παραγώγου της f στο x_o. Δηλαδή, αν δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_o} f'(x)$ δε σημαίνει ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_o. Δίνεται σχετικό παράδειγμα παρακάτω. Πρώτα όμως ας δούμε μία εφαρμογή του παραπάνω θεωρήματος στην άσκηση που ακολουθεί:

<u>Άσκηση</u>: Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \lambda, & x \le 1 \\ \\ 4\sqrt{x} - 1, & x > 1 \end{cases}.$$

Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η f είναι συνεχής στο 1 και στη συνέχεια για την τιμή του λ που θα βρείτε να εξετάσετε αν η f είναι και παραγωγίσιμη στο 1.

<u>Λύση</u>

Εύκολα βρίσκουμε ότι για $\lambda = 2$ η f είναι συνεχής στο 1.
Για $\lambda = 2$ θα μελετήσουμε την f ως προς την παραγωγισιμότητα στο 1 με δύο τρόπους, με τον ορισμό και με εφαρμογή του παραπάνω θεωρήματος.

<u>1^{ος} τρόπος</u> (με τον ορισμό της παραγώγου)

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+2-3}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}(x+1) = 2$$

και

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{4\sqrt{x}-1-3}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{4\sqrt{x}-1-3}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{4\sqrt{x}-4}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{4(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \lim_{x\to 1^+}\frac{4}{(\sqrt{x}+1)} = \frac{4}{2} = 2.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1) = 2$.

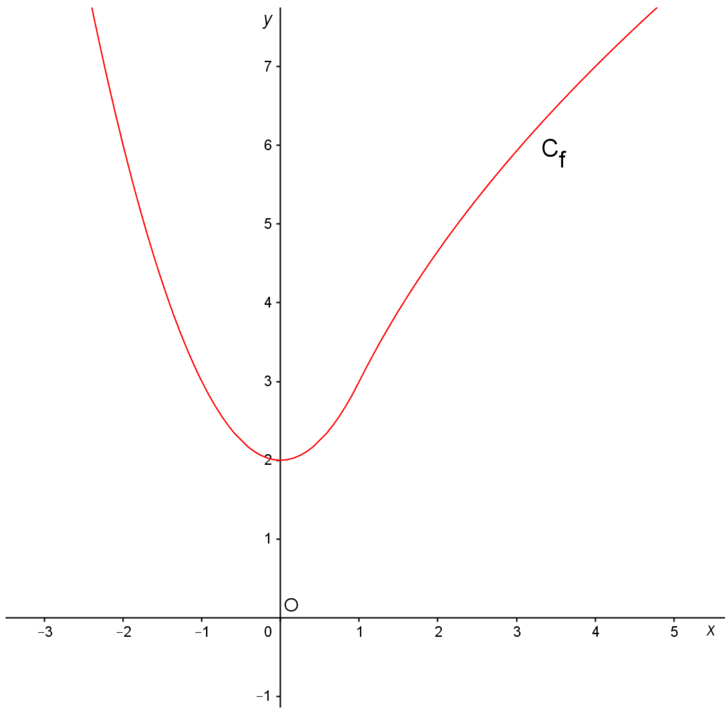
<u>2^{ος} τρόπος</u> (με την βοήθεια του παραπάνω θεωρήματος)

Έχουμε:

$$f'(x) = 2x,\ x < 1 \qquad \text{και} \qquad f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}},\ x > 1.$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = 2$ και αφού η f είναι συνεχής στο 1, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα συμπεραίνουμε ότι η f είναι και παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1) = 2$.

Για $\lambda = 2$ η παραγωγισιμότητα της f στο 1 φαίνεται και από την γραφική της παράσταση που ακολουθεί.



Ως εκπαιδευτικοί θα πρέπει να προφυλάσσουμε τους μαθητές μας από τα παραπάνω λάθη λύνοντας σχετικές ασκήσεις στην τάξη και συζητώντας όλες τις περιπτώσεις. Θα πρέπει να τονίζουμε ιδιαίτερα ότι η συνέχεια μιας συνάρτησης πολλαπλού τύπου σε ένα συνοριακό της σημείο x_o στο οποίο ορίζεται είναι αναγκαία συνθήκη, όχι και ικανή, για να είναι η συνάρτηση αυτή παραγωγίσιμη στο x_o. Γι' αυτό λοιπόν, όταν θέλουμε να δούμε αν μία συνάρτηση f πολλαπλού τύπου είναι παραγωγίσιμη σε ένα συνοριακό της σημείο x_o στο οποίο ορίζεται, καλό είναι πρώτα να μελετάμε τη συνάρτηση αυτή ως προς τη συνέχεια στο x_o και αν είναι συνεχής, τότε να την μελετάμε και ως προς την παραγωγισιμότητα. Ο έλεγχος για την παραγωγισιμότητα πρέπει να γίνεται με τον ορισμό και μόνο και όχι με τη βοήθεια του παραπάνω θεωρήματος, το οποίο και δεν υπάρχει στο σχολικό βιβλίο, αλλά και όπως αναφέρθηκε η ύπαρξη του $\lim\limits_{x\to x_o} f'(x)$ αποτελεί μόνο ικανή συνθήκη για να είναι παραγωγίσιμη η συνάρτηση f στο x_o, δηλαδή, αν δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_o} f'(x)$ δε σημαίνει ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_o. Χαρακτηριστικό είναι το παρακάτω παράδειγμα:

<u>Παράδειγμα 2</u>: Έστω η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{\frac{3}{2}} \sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} (-x)^{\frac{3}{2}} \sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{1}{x}\right), & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^{\frac{3}{2}} \sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{1}{x}\right), & x > 0 \end{cases}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=\begin{cases}-\frac{3}{2}\sqrt{-x}\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{\sqrt{-x}}\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right), & x<0\\ 0, & x=0\\ \frac{3}{2}\sqrt{x}\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{\sqrt{x}}\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right), & x>0\end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι $f'(0)=0$, ενώ δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f'(x)$, όπως εύκολα αποδεικνύεται με τη βοήθεια των ακολουθιών $x_\nu=-\dfrac{1}{2\nu\pi+\frac{\pi}{2}}$ και $x_\nu=\dfrac{1}{2\nu\pi+\frac{\pi}{2}}$.

Β. Κανόνες de L' Hospital

Ένα λάθος που γίνεται συχνά από μαθητές της Γ΄ Λυκείου στην εφαρμογή των κανόνων de L' Hospital είναι στην περίπτωση που το x τείνει σε έναν πραγματικό αριθμό x_0, οι συναρτήσεις των όρων της κλασματικής παράστασης είναι παραγωγίσιμες σε περιοχή του x_0 και η παράγωγος της συνάρτησης του παρονομαστή στο x_0 είναι διάφορη του μηδενός. Στην περίπτωση αυτή οι μαθητές, όταν συναντούν απροσδιόριστη μορφή, ισχυρίζονται ότι το ζητούμενο όριο είναι ίσο με το όριο της κλασματικής παράστασης που προκύπτει με την παραγώγιση των όρων της αρχικής κλασματικής παράστασης και αμέσως δίνουν ως όριο τον λόγο των παραγώγων των δύο συναρτήσεων στο x_0. Δηλαδή, για παράδειγμα, γράφουν:

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)\text{ή}\left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)}{=}\lim_{x\to x_o}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{f'(x_o)}{g'(x_o)}.$$

Το πρόβλημα εδώ είναι ότι οι μαθητές δεν εξετάζουν εάν υπάρχει το όριο της κλασματικής παράστασης που προκύπτει με την παραγώγιση, δηλαδή δεν εξετάζουν αν υπάρχει το

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

και ενεργούν με τον τρόπο που περιγράφεται παραπάνω. Είναι προφανές ότι αν δεν υπάρχει αυτό το όριο, τότε η διαδικασία δεν θα είναι σωστή. Νομίζω ότι οι μαθητές που κάνουν αυτό το λάθος θεωρούν ότι δε χρειάζεται να γίνεται έλεγχος, γιατί ίσως δεν έχουν προσέξει τη διατύπωση του θεωρήματος ή στις ασκήσεις που έχουν λύσει, οι συναρτήσεις έχουν συνεχείς παραγωγούς οπότε εφαρμόζεται το θεώρημα χωρίς να γίνεται ειδική αναφορά και τους δημιουργείται έτσι η εντύπωση ότι ισχύει γενικά, κάτι όμως που δεν ισχύει, όπως φαίνεται καθαρά στο επόμενο παράδειγμα.

(*Μπορείτε να δείτε αν θέλετε και στην ηλεκτρονική διεύθυνση*:
http://www.p-theodoropoulos.gr/ergasies/didakt-ask-glyk.pdf
σχετικό σχόλιό μου για την εφαρμογή των κανόνων de L' Hospital).

Αξίζει να σημειωθεί ότι θα πρέπει να προσέχουμε και εμείς τον τρόπο διατύπωσης μιας άσκησης, ώστε να μην παρασύρουμε τους μαθητές σε τέτοια λάθη. Για **παράδειγμα (3)**, αν δώσουμε στους μαθητές την παρακάτω άσκηση:

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x)=\begin{cases} \dfrac{\eta\mu x}{x^2}-\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}.$$

α. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο 0.

β. Να βρείτε (αν υπάρχει) το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

απαντώντας οι μαθητές στο πρώτο ερώτημα θα βρουν εύκολα ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο 0 με $f'(0)=0$ και $g'(0)=-\dfrac{1}{6}$, ενώ για το δεύτερο ερώτημα πολλοί μαθητές θα παρασυρθούν από την ύπαρξη των παραγώγων των δύο συναρτήσεων στο 0 και θα δώσουν ως λύση:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{0}{-\frac{1}{6}} = 0,$$

επειδή δεν υποψιάζονται ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$.

Αν όμως στο πρώτο ερώτημα ζητηθεί να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων αυτών που είναι:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\eta\mu\dfrac{1}{x}-\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases} \quad \& \quad g'(x)=\begin{cases} \dfrac{x\sigma\upsilon\nu x-2\eta\mu x}{x^3}+\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0 \\ -\dfrac{1}{6}, & x=0 \end{cases}$$

τότε ίσως κάποιοι μαθητές δουν ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ και δώσουν τη λύση:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)}{x}}{\dfrac{g(x)}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}}{\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{0}{-\dfrac{1}{6}} = 0$$

που είναι σωστή.

Παρατηρώντας τη δεύτερη λύση βλέπουμε ότι τελικά το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ είναι ίσο[3] με $\dfrac{f'(0)}{g'(0)}$ που δίνουν οι μαθητές και στην πρώτη λύση. Όμως, η πρώτη λύση δεν μπορεί να γίνει αποδεκτή, επειδή οι μαθητές ισχυρίζονται ότι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = 0,$$

ενώ το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ δεν υπάρχει, αφού δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$. Την μη ύπαρξη του $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε με τη βοήθεια των ακολουθιών $\alpha_\nu = \dfrac{1}{2\nu\pi + \dfrac{\pi}{2}}$ και $\beta_\nu = \dfrac{1}{2\nu\pi}$, όπου παίρνουμε: $\lim f'(\alpha_\nu) = 0$ και $\lim f'(\beta_\nu) = -1$. Τον τρόπο αυτόν όμως με τις ακολουθίες δεν μπορούμε να τον παρουσιάσουμε στους μαθητές, γιατί δεν γνωρίζουν την αντίστοιχη θεωρία. Απλώς αναφέρουμε στους μαθητές, που πρέπει να γνωρίζουν, ότι δεν υπάρχουν τα όρια:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\eta\mu x \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\pm\infty}\sigma\upsilon\nu x.$$

Επειδή στο σχολικό βιβλίο δεν τονίζεται[4] ιδιαίτερα η μη ύπαρξη των ορίων: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\eta\mu x$ και $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sigma\upsilon\nu x$ και στις πανελλαδικές εξετάσεις έχουν δοθεί σχετικά θέματα ⟨ για παράδειγμα, στις εξετάσεις του 2001 ζητήθηκε ο υπολογισμός του ορίου:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{1+x^2}\cdot\eta\mu(2x)\right) \rangle,$$

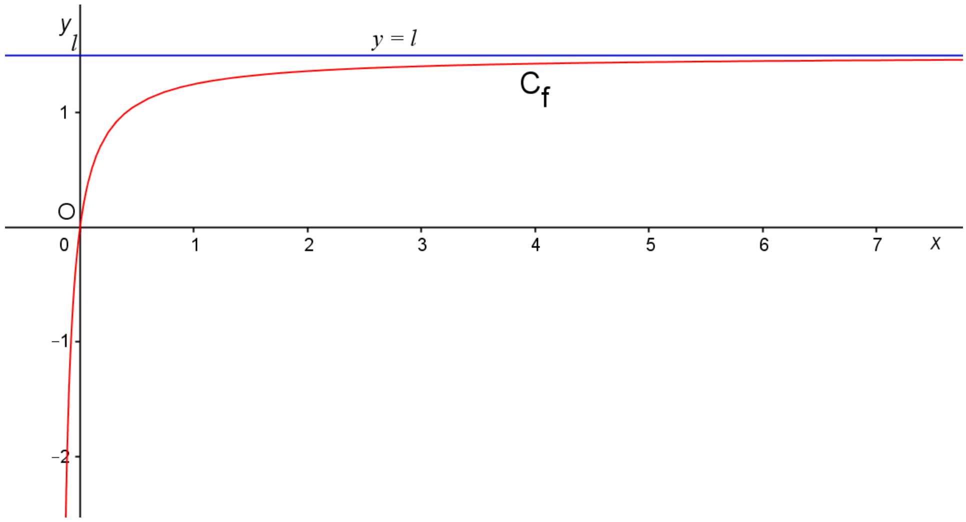
θα πρέπει να το τονίζουμε εμείς κατά τη διδασκαλία. Εγώ για να πείσω τους μαθητές μου ότι δεν υπάρχουν τα όρια: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\eta\mu x$ και $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sigma\upsilon\nu x$ και να χρησιμοποιούν τη διαδικασία με τη φραγμένη συνάρτηση για τον υπολογισμό ορίων σαν αυτό των πανελλαδικών εξετάσεων, χρησιμοποιούσα γραφικό τρόπο. Πα-

---

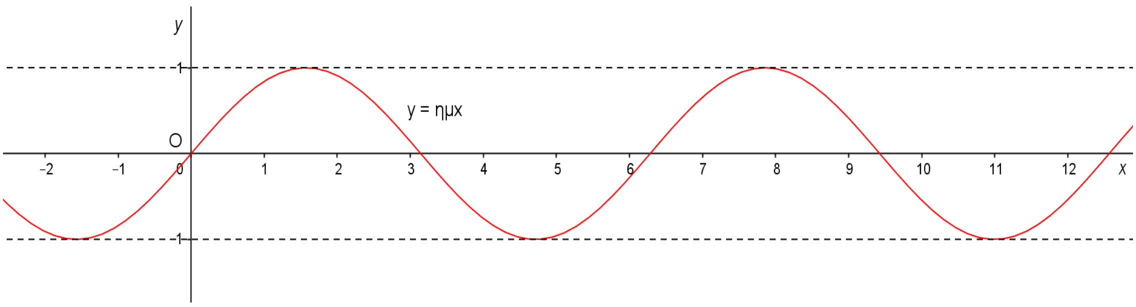
[3] Γενικά αποδεικνύεται ότι αν f και g είναι δύο συναρτήσεις, οι οποίες ορίζονται σε μια περιοχή ενός σημείου x_o και είναι παραγωγίσιμες στο x_o και ισχύουν $f(x_o) = g(x_o) = 0$, $g(x) \neq 0$ κοντά στο xo και $g'(x_o) \neq 0$, τότε: $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(x_o)}{g'(x_o)}$.

[4] Δείτε το παράδειγμα στο κριτήριο παρεμβολής.

ρουσίαζα στους μαθητές για σύγκριση και αντιδιαστολή τις γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων, όπως π.χ. τις παρακάτω:



και



στις οποίες παρατηρούμε τα εξής:

- Στην πρώτη γραφική παράσταση η καμπύλη στο +∞ προσεγγίζει μια οριζόντια ευθεία με εξίσωση $y = l$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ και ισούται με l, δηλαδή $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$.

- Στη δεύτερη, που είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$, η οποία είναι φραγμένη, φαίνεται καθαρά ότι η ταλάντωση συνεχίζεται ως το +∞ και το -∞, δηλαδή η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$ και στο +∞ και στο -∞ δεν προσεγγίζει μια οριζόντια ευθεία, που σημαίνει ότι δεν υπάρχουν τα όρια:

$$\lim_{x\to+\infty} \eta\mu x \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} \eta\mu x .$$

Γ. Παράγωγος τετραγωνικής ρίζας συνάρτησης

Ένα άλλο λάθος που κάνουν επίσης πολλοί μαθητές της Γ΄ Λυκείου είναι στην παραγώγιση της τετραγωνικής ρίζας μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης g με μη αρνητικές τιμές όπου δεν εξετάζουν αν η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{g(x)}$ παραγωγίζεται και στα σημεία (αν υπάρχουν) που μηδενίζεται η g. Επειδή η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ δεν παραγωγίζεται στο 0, οι μαθητές αυτοί νομίζουν ότι και η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{g(x)}$ δεν παραγωγίζεται στα σημεία που μηδενίζεται η g (προφανώς και η f) και γι' αυτό δεν κάνουν ειδικό έλεγχο για αυτά τα σημεία. Αυτό για τους μαθητές θεωρώ πως είναι δικαιολογημένο, γιατί στο σχολικό βιβλίο στην εύρεση της παραγώγου της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x}$ δεν ελέγχεται αν η συνάρτηση αυτή είναι παραγωγίσιμη και στο 0, αλλά γίνεται παραπομπή σε προηγούμενη παράγραφο που είναι εκτός ύλης. Αυτό έχει ως συνέπεια οι μαθητές να μη συνειδητοποιούν ότι πρέπει να ελέγχεται και αυτή η περίπτωση.

Εδώ είναι σημαντικός ο ρόλος του εκπαιδευτικού, ο οποίος πρέπει να τονίζει ιδιαίτερα την περίπτωση αυτή δίνοντας στους μαθητές και ειδικές συναρτήσεις για παραγώγιση όπως αυτή του παραδείγματος που ακολουθεί.

<u>Παράδειγμα 4</u>: Αν ζητήσουμε από τους μαθητές να βρουν την παράγωγο της συνάρτησης:

$$f(x)=\sqrt{x\eta\mu x},\ x\in[0,\ \pi],$$

τότε πολλοί μαθητές θεωρώντας ότι η συνάρτηση αυτή δεν παραγωγίζεται στα σημεία 0 και π, επειδή μηδενίζεται σ' αυτά, θα δώσουν ως παράγωγο της f τη συνάρτηση:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x\eta\mu x}}\cdot(\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x),\ x\in(0,\ \pi).$$

Όμως, όπως τονίσθηκε παραπάνω, θα πρέπει να ελεγχθεί αν η f είναι παραγωγίσιμη και στα σημεία μηδενισμού της, δηλαδή στα σημεία 0 και π. Έτσι έχουμε:

α) <u>Έλεγχος για το σημείο 0</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x\eta\mu x}}{x}=\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{x\eta\mu x}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{\eta\mu x}{x}}=1$$

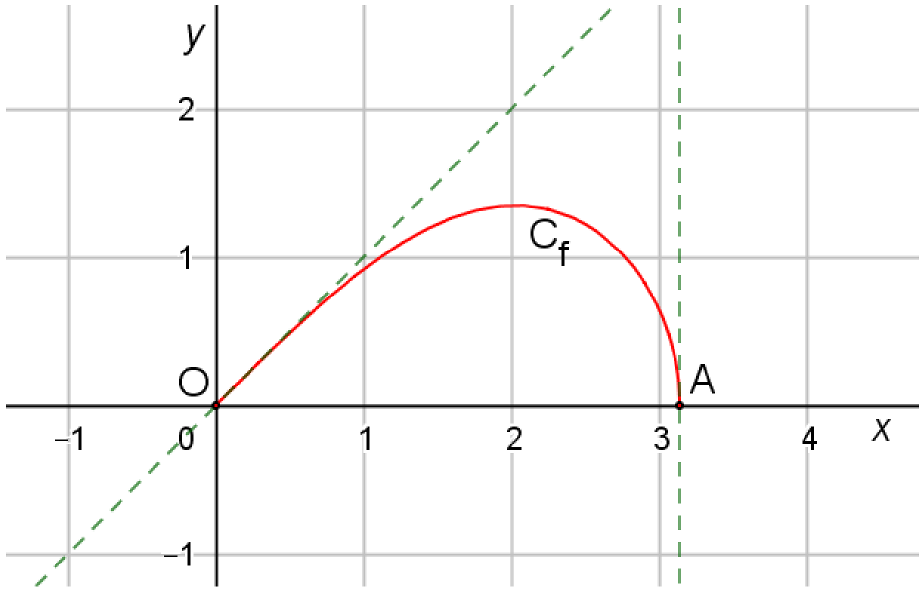
β) <u>Έλεγχος για το σημείο π</u>

$$\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sqrt{x\eta\mu x}}{x-\pi}=-\lim_{x\to\pi}\sqrt{\frac{x\eta\mu(\pi-x)}{(\pi-x)^2}}=-\lim_{x\to\pi}\sqrt{\frac{1}{\pi-x}\cdot\frac{x\eta\mu(\pi-x)}{\pi-x}}=-\infty$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και στο 0, ενώ στο π δεν είναι, οπότε η παράγωγός της είναι η συνάρτηση:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{x\eta\mu x}}\cdot(\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x), & x\in(0,\ \pi)\\[2em] 1, & x=0\end{cases}$$

Εποπτικά αυτό φαίνεται στη γραφική παράσταση της f που ακολουθεί, στην οποία παρατηρούμε ότι η κλίση της f στο 0 είναι ίση με 1, ενώ στο π απειρίζεται αρνητικά, αφού η C_f στο σημείο αυτό κατεβαίνοντας (αρνητική κλίση) τέμνει κάθετα τον άξονα $x'x$.



Αντί επιλόγου - Μία γενική παρατήρηση

Ο τίτλος του αντίστοιχου κεφαλαίου είναι «**Διαφορικός Λογισμός**».

Όμως, στο κεφάλαιο αυτό σε κανένα σημείο δεν δίνεται η έννοια του **διαφορικού** μιας συνάρτησης σε ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της στο οποίο είναι παραγωγίσιμη. Γι' αυτό οι μαθητές ίσως να απορούν γιατί ονομάζεται έτσι το συγκεκριμένο κεφάλαιο.

Είναι γνωστό ότι αν μια συνάρτηση $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της, τότε το **διαφορικό**[5] της f στο σημείο x_o ορίζεται ως εξής:

$$dy = df(x_o) = f'(x_o)dx\,.$$

Παρατηρούμε ότι το **διαφορικό** μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της στο οποίο είναι παραγωγίσιμη είναι μια **γραμμική συνάρτηση** που περιέχει άπειρα μικρές μεταβολές (απειροστά) των μεταβλητών x και y, που είναι οι αριθμοί dx και dy με σημεία αναφοράς τα x_o και $f(x_o)$ αντίστοιχα, δηλαδή είναι $dx = x - x_o$ και $dy = y - f(x_o)$.
Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τα απειροστά μπορείτε να επισκεφτείτε την μικροεφαρμογή GeoGebra: https://www.geogebra.org/m/AkjnTNz4 .
Με τη βοήθεια του διαφορικού μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της στο οποίο είναι παραγωγίσιμη υπολογίζονται με μεγάλη ακρίβεια οι τιμές της f για τιμές του x κοντά στο x_o σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$f(x_o + dx) \approx f(x_o) + dy = f(x_o) + f'(x_o)dx \quad (1).$$

[5] Ο Leibniz (1646 – 1716) επινόησε τα απείρως μικρά μεγέθη τα οποία ονόμασε διαφορικά και για την απόδοσή τους χρησιμοποίησε τον συμβολισμό που χρησιμοποιείται και σήμερα.

Η τελευταία σχέση γραφικά εξηγείται ως εξής:
Η **γραφική παράσταση** της συνάρτησης $dy = df(x_o) = f'(x_o)dx$ βρίσκεται πάνω στην εφαπτομένη της C_f στο $(x_o, f(x_o))$ και επειδή η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(x_o, f(x_o))$ σχεδόν ταυτίζεται με την C_f κοντά στο x_o, προκύπτει η παραπάνω σχέση (1).
Παρατηρούμε λοιπόν ότι το διαφορικό μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της στο οποίο είναι παραγωγίσιμη συνδέεται άμεσα με την ύπαρξη πλάγιας εφαπτομένης της C_f στο αντίστοιχο σημείο.

Σχετικά τώρα με τη διδασκαλία της έννοιας του διαφορικού στους μαθητές της Γ΄ Λυκείου προσωπικά πιστεύω ότι για μια ολοκληρωμένη διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου καλό θα ήταν να συμπεριληφθεί στην ύλη των Μαθηματικών Κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου και η έννοια του διαφορικού. Θεωρώ ότι συναρτήσεις σαν τη συνάρτηση f της τρίτης ενότητας προσφέρονται για την παρουσίαση της έννοιας του διαφορικού μιας συνάρτησης σε μαθητές της Γ΄ Λυκείου, γιατί εμφανίζονται και οι δύο οι περιπτώσεις και έτσι οι μαθητές μπορούν να τις συγκρίνουν και να τις κατανοήσουν καλύτερα. Πιο συγκεκριμένα, για τη συνάρτηση αυτή ορίζεται διαφορικό στα σημεία του διαστήματος [0, π), επειδή είναι παραγωγίσιμη σ' αυτά τα σημεία, ενώ στο σημείο π, που δεν είναι παραγωγίσιμη, δεν ορίζεται διαφορικό. Οι μαθητές για τα σημεία 0 και π μπορούν να το διαπιστώσουν αυτό και εποπτικά από το αντίστοιχο σχήμα ως εξής:
Οι μαθητές θα παρατηρήσουν στο σχήμα ότι η γραφική παράστασης της f στο σημείο $O(0, f(0))$ έχει πλάγια εφαπτομένη, που είναι γραφική παράσταση συνάρτησης, οπότε ορίζεται διαφορικό της f στο 0, ενώ στο σημείο $A(\pi, f(\pi))$ η C_f έχει κατακόρυφη εφαπτομένη, που δεν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης, οπότε δεν ορίζεται διαφορικό της f στο π.

Αν εισαχθεί η έννοια του διαφορικού στην ύλη των Μαθηματικών Κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου, τότε οι μαθητές θα κατανοούν:

1. τον τίτλο του αντίστοιχου κεφαλαίου,
2. τον όρο «*διαφορικές εξισώσεις*»,
3. το διαφορικό $du = g'(x)dx$ που συναντούν στον Ολοκληρωτικό Λογισμό,
4. γιατί μια **παραγωγίσιμη** συνάρτηση λέγεται και **διαφορίσιμη** και τέλος
5. γιατί στον ορισμό της παραγώγου, όταν το όριο $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ υπάρχει

   και δεν είναι πραγματικός αριθμός (είναι $+\infty$ ή $-\infty$) δεν λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη (διαφορίσιμη) στο x_o.