Ασκήσεις Μαθηματικών Θετικής & Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου

Δρ. Παναγιώτης Λ. Θεοδωρόπουλος
Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03
e-mail@p-theodoropoulos.gr

Στην εργασία αυτή ξεχωρίζουμε και μελετάμε μερικές περιπτώσεις ασκήσεων από τα Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου, οι οποίες παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον, με σκοπό να βοηθήσουμε τους μαθητές της Γ΄ Λυκείου της Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης να εμπεδώσουν τις αντίστοιχες διαδικασίες και να μπορούν να τις εφαρμόζουν για τη λύση παρόμοιων ασκήσεων. Για την καλύτερη εμπέδωση των διαδικασιών που αναλύονται εδώ, εκτός από τα λυμένα παραδείγματα, όλες οι περιπτώσεις συνοδεύονται και από ασκήσεις που προτείνονται για λύση.

1. Εύρεση ενός γεωμετρικού τόπου

Θα αναφερθούμε μόνο στην εύρεση του γεωμετρικού τόπου των εικόνων μιας οικογένειας μιγαδικών αριθμών w, οι οποίοι συνδέονται αλγεβρικά με μία άλλη οικογένεια μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους γνωρίζουμε ή μπορούμε να βρούμε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων τους. Εδώ διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις.

1.1 Οι μιγαδικοί z μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των w και ο γ.τ. των εικόνων των z εκφράζεται με μία εξίσωση με μιγαδική μεταβλητή

Στην περίπτωση αυτή ένας σύντομος και καλός τρόπος είναι να εκφράσουμε τους μιγαδικούς z συναρτήσει των w λύνοντας την δοθείσα σχέση που τους συνδέει ως προς z και να αντικαταστήσουμε το z εκφρασμένο συναρτήσει του w στην εξίσωση που ικανοποιούν οι μιγαδικοί z. Από την εξίσωση που προκύπτει εξάγεται ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w. Χαρακτηριστικό είναι το επόμενο παράδειγμα.

<u>Παράδειγμα</u>: Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει η σχέση $|2z - 3 + 2i| = 8$ και τους μιγαδικούς w που δίνονται από τη σχέση $w = 2z - 5i$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών w.

Λύση: Προφανώς ισχύει η ισοδυναμία:

$$w = 2z - 5i \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{w+5i}{2} \qquad (1)$$

Αντικαθιστώντας στη συνέχεια το z στη δοθείσα εξίσωση που ικανοποιούν οι μιγαδικοί z, παίρνουμε μία εξίσωση που ισχύει για τους μιγαδικούς w, δηλαδή έχουμε:

$$|2z-3+2i| = 8 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \left|2\frac{w+5i}{2} - 3 + 2i\right| = 8 \Leftrightarrow |w-3+7i| = 8 \Leftrightarrow |w-(3-7i)| = 8\,.$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος με κέντρο την εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z_o = 3\text{-}7i$ και ακτίνα ρ = 8.

<u>Προτεινόμενη άσκηση</u>: Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει η σχέση $|z| = 1$ και τους μιγαδικούς w που δίνονται από τη σχέση $w = \dfrac{3z-1}{z+2}$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών w.

1.2 Οι μιγαδικοί z δεν μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των w ή η εξίσωση των μιγαδικών z διατυπώνεται μόνο αναλυτικά

Εδώ έχουμε τις παρακάτω δύο υποπεριπτώσεις:

1.2α. Το πραγματικό και το φανταστικό μέρος των μιγαδικών z μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει του πραγματικού και του φανταστικού μέρους των w

Στην περίπτωση αυτή εκφράζουμε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος των z συναρτήσει του πραγματικού και του φανταστικού μέρους των w και αντικαθιστούμε τις παραστάσεις που βρίσκουμε στην αναλυτική εξίσωση των z και μετά από επεξεργασία προκύπτει ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w. Χαρακτηριστικό είναι το επόμενο παράδειγμα.

<u>Παράδειγμα</u>: **Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει η σχέση $|z| = 4$ και τους μιγαδικούς w που δίνονται από τη σχέση $w = z + \dfrac{4}{z}$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w.**

Λύση: Έστω $z = a + \beta i$ και $w = x + yi$, $\alpha, \beta, x, y \in IR$.

Αφού $|z| = 4$ και $z = a + \beta i$ ισχύει η σχέση: $a^2 + \beta^2 = 16$ (1).

Αντικαθιστώντας τους μιγαδικούς z και w στη δοθείσα σχέση παίρνουμε:

$$x + yi = \alpha + \beta i + \frac{4}{\alpha + \beta i} = \alpha + \beta i + \frac{4(\alpha - \beta i)}{\alpha^2 + \beta^2} = \alpha + \beta i + \frac{1}{4}(\alpha - \beta i),$$

από όπου προκύπτουν οι σχέσεις: $\alpha = \dfrac{4x}{5}$ και $\beta = \dfrac{4y}{3}$ (2).

Αντικαθιστώντας στη συνέχεια τα a και β όπως εκφράζονται στις σχέσεις (2) στην ισότητα (1) παίρνουμε:

$$(\frac{4}{5}x)^2 + \left(\frac{4}{3}y\right)^2 = 16 \iff \frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{9}y^2 = 16 \iff \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Από την τελευταία ισότητα συμπεραίνουμε ότι οι εικόνες των μιγαδικών w ανήκουν στην έλλειψη $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

Για να συμπεράνουμε όμως ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w είναι η έλλειψη με την παραπάνω εξίσωση πρέπει να εξετάσουμε αν κάθε σημείο της έλλειψης αυτής είναι εικόνα κάποιου μιγαδικού αριθμού w.

Έστω Μ(x', y') ένα σημείο της έλλειψης $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

Προφανώς το σημείο M(x', y') είναι εικόνα του μιγαδικού αριθμού $w' = x' + y'i$.

Αν θεωρήσουμε τον μιγαδικό $z' = \frac{4x'}{5} + \frac{4y'}{3}i$, τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι ο z' ανήκει στον κύκλο με κέντρο το O(0, 0) και ακτίνα ρ = 4 και ακόμη ότι ισχύει η σχέση $w' = z' + \frac{4}{z'}$.

Τώρα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w είναι η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

<u>Σημείωση:</u> Η παραπάνω άσκηση αποτελεί μία διασκευή της άσκησης 9 της σελίδας 102 του σχολικού βιβλίου. Αν θέλετε μπορείτε να δείτε στην ηλεκτρονική διεύθυνση:

https://www.geogebra.org/m/aY8zsDZp

μία σχετική μικροεφαρμογή GeoGebra που έχω δημιουργήσει για την οπτικοποίηση της παραπάνω διαδικασίας.

<u>Σχόλιο</u>: Όταν ζητείται ένας γεωμετρικός τόπος πρέπει να εξετάζουμε αν κάθε σημείο του σχήματος στο οποίο καταλήγουμε έχει την χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων του γεωμετρικού τόπου. Αν δεν έχουν όλα τα σημεία του σχήματος αυτού την χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων του γεωμετρικού τόπου, τότε εντοπίζουμε ποια σημεία την έχουν και προσδιορίζουμε έτσι τον ζητούμενο γεωμετρικό τόπο. Όταν όμως μας ζητείται να αποδείξουμε μόνο ότι το σημείο κινείται (ανήκει) σε κάποιο σχήμα, τότε δεν απαιτείται η παραπάνω εξέταση, αλλά στην περίπτωση αυτή δεν μπορούμε να μιλάμε για γεωμετρικό τόπο, επειδή δεν γνωρίζουμε αν όλα τα σημεία του σχήματος στο οποίο καταλήγουμε έχουν την ιδιότητα που δίνεται.

<u>Προτεινόμενες ασκήσεις</u>: 1) Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει η σχέση Im(z) = Re(z) + 1 και τους μιγαδικούς w που δίνονται από τη σχέση $w = 2z + i\bar{z} - 1$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των w.

2) Αν οι μιγαδικοί z και w συνδέονται με τη σχέση $w - wi = \frac{i}{z} - z$ και οι μιγαδικοί z είναι φανταστικοί, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των w κινούνται σε μια υπερβολή.

1.2β. Δεν μπορεί να εκφραστεί το πραγματικό ή το φανταστικό μέρος των z συναρτήσει του πραγματικού και του φανταστικού μέρους των w

Σε μια τέτοια περίπτωση *το συμπέρασμα προκύπτει σύμφωνα με τα στοιχεία στα οποία καταλήγουμε μετά την επεξεργασία που κάνουμε. Σχετική είναι η επόμενη άσκηση.*

<u>Προτεινόμενη άσκηση</u>: Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει η σχέση $|z| = 2$ και τους μιγαδικούς w που δίνονται από τη σχέση:

$$w = z - \frac{4}{z}.$$

Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των w.

2. Η εξίσωση $f^{-1}(x) = x$

Για την επίλυση μιας τέτοιας εξίσωσης, αν δεν είναι δυνατή η εύρεση του τύπου της f^{-1}, μπορούμε να εφαρμόζουμε την ισοδυναμία:

$$f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x, \quad x \in D_f \cap D_{f^{-1}}$$

(Αν η γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης $y = f(x)$ τέμνει την ευθεία $y = x$ σε ένα σημείο, τότε στο ίδιο σημείο την τέμνει και η γραφική παράσταση της αντίστροφής της).

<u>Παράδειγμα:</u> Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x - 3$ είναι αντιστρέψιμη και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = x$.

Λύση: Αποδεικνύεται εύκολα είτε αλγεβρικά, είτε με τη βοήθεια της μονοτονίας ότι η f είναι 1-1, οπότε αντιστρέφεται. Επειδή όμως δεν μπορούμε να βρούμε την αντίστροφη συνάρτηση της f, για να λύσουμε την δοθείσα εξίσωση, μπορούμε να λύσουμε την ισοδύναμή της $f(x) = x$, δηλαδή την εξίσωση $x^3 + 3x - 3 = x$, που λύνεται εύκολα.

<u>Προτεινόμενη άσκηση</u>: Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = 4^x + 2x^3 + 5x - 10$ είναι αντιστρέψιμη και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = x$.

3. Όριο γινομένου δύο συναρτήσεων – Μία ειδική περίπτωση

Θα μελετήσουμε την περίπτωση κατά την οποία θέλουμε να βρούμε το όριο μιας συνάρτησης $h(x) = f(x)g(x)$ όταν το x τείνει στο $x_o \in IR \cup \{-\infty, +\infty\}$, στην περίπτωση που υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$ και είναι ίσο με 0 και η g δεν έχει ή δεν γνωρίζουμε αν έχει όριο στο x_o. Αποδεικνύεται εύκολα ότι:

Αν η συνάρτηση g είναι φραγμένη σε περιοχή του x_o, τότε η $h(x) = f(x)g(x)$ έχει όριο στο x_o και ισχύει $\lim\limits_{x \to x_o} \left(f(x)g(x)\right) = 0$.

Αν όμως η συνάρτηση g δεν είναι φραγμένη σε περιοχή του x_o, τότε μπορεί η h να έχει όριο στο x_o, όπως π.χ. $\lim\limits_{x \to 1}\left(\dfrac{x-1}{x^3+1} \cdot \dfrac{x^2}{x-1}\right) = \dfrac{1}{2}$ ή να μην έχει, όπως π.χ. η συνάρτηση $h(x) = \eta\mu\dfrac{1}{x} \cdot x\sigma\upsilon\nu x$, η οποία δεν έχει όριο στο $+\infty$.

Ας δούμε ένα παράδειγμα στην περίπτωση κατά την οποία ο ένας παράγοντας είναι μία **φραγμένη συνάρτηση σε περιοχή του x_o και ο άλλος μία συνάρτηση που έχει όριο στο x_o το 0.**

<u>Παράδειγμα</u>: Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{x}{x^2+1}\eta\mu\dfrac{x^2+3}{x-1}\right)$.

Λύση: Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right) = 0$, ενώ η συνάρτηση $g(x) = \eta\mu\dfrac{x^2+3}{x-1}$ δεν έχει όριο στο $+\infty$.

Όμως η συνάρτηση $g(x)=\eta\mu\dfrac{x^2+3}{x-1}$ είναι φραγμένη, αφού $|\,g(x)|=\left|\eta\mu\dfrac{x^2+3}{x-1}\right|\le 1$ για κάθε $x\in D_g=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

Έτσι, έχουμε:

$$\left|\frac{x}{x^2+1}\eta\mu\frac{x^2+3}{x-1}\right|\le\left|\frac{x}{x^2+1}\right|,\ x\in IR-\{\,1\,\}$$

από όπου παίρνουμε:

$$-\left|\frac{x}{x^2+1}\right|\le\frac{x}{x^2+1}\eta\mu\frac{x^2+3}{x-1}\le\left|\frac{x}{x^2+1}\right|,\quad x\in IR-\{\,1\,\}.$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\left|\dfrac{x}{x^2+1}\right|\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\dfrac{x}{x^2+1}\right|=0$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)=0$, σύμφωνα με το κριτήριο της παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x^2+1}\eta\mu\dfrac{x^2+3}{x-1}\right)=0$.

<u>**Σχόλιο**</u>**:** Στις ασκήσεις μπορεί να συναντήσουμε οποιαδήποτε φραγμένη συνάρτηση σε περιοχή του X_o. Αξίζει να σημειωθεί όμως ότι φραγμένες συναρτήσεις που δεν έχουν όριο και εμφανίζονται συχνά σε ασκήσεις και πρέπει να εφαρμόζουμε την παραπάνω διαδικασία είναι οι συναρτήσεις της μορφής $y=\eta\mu u$ και $y=\sigma\upsilon\nu u$ με την παράσταση u να έχει μη πεπερασμένο όριο στο X_o, όπως η συνάρτηση $g(x)=\eta\mu\dfrac{x^2+3}{x-1}$ στο παραπάνω παράδειγμα.

<u>**Προτεινόμενη άσκηση**</u>**: Δίνεται η συνάρτηση $f:IR\to IR$ για την οποία για κάθε $x\in IR$ ισχύει η σχέση: $f^5(x)+f^3(x)+f(x)=x+\eta\mu x$. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_o=0$.**

4. Παράγωγος μιας συνάρτησης που ικανοποιεί μια συνθήκη

Αν μας δίνεται ότι μία συνάρτηση f ικανοποιεί μία συνθήκη της μορφής $f(x+y)=\ldots$ή της μορφής $f(xy)=\ldots$ και ζητείται η παράγωγός της, τότε εργαζόμαστε ως εξής:

1. Αν δίνεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη, τότε μπορούμε να παραγωγίζουμε τα μέλη της δοθείσας σχέσης ως προς y και στη συνέχεια να αντικαθιστούμε το y με 0 αν είναι της πρώτης μορφής ή με 1 αν είναι της δεύτερης και να βρίσκουμε έτσι μία σχέση για την παράσταση $f'(x)$.
2. Αν δίνεται ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και ζητείται να αποδείξουμε ότι είναι παραγωγίσιμη, τότε εφαρμόζοντας τον ορισμό της παραγώγου για το τυχαίο σημείο x του πεδίου ορισμού της και χρησιμοποιώντας φυσικά ότι είναι παραγωγίσιμη στο x_0 αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη.

Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα που ακολουθεί.

<u>Παράδειγμα:</u> Έστω μία συνάρτηση $f: IR \to IR$ για την οποία για κάθε $x, y \in IR$ ισχύει η σχέση:

$$f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x) + xy.$$

α. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο IR, να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in IR$ ισχύει:

$$f'(x) = f(x) + f'(0)e^x + x \;.$$

β. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, να αποδείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη σε όλο το IR και ισχύει $f'(x) = f(x) + f'(0)e^x + x$ για κάθε $x \in IR$.

Λύση: α. Παραγωγίζοντας τα μέλη της δοθείσας ισότητας ως προς y παίρνουμε:

$$f'(x+y) = e^x f'(y) + e^y f(x) + x.$$

Αντικαθιστώντας στη συνέχεια στην τελευταία ισότητα το y με 0 παίρνουμε:

$$f'(x) = f(x) + f'(0)e^x + x.$$

β. Για κάθε $x \in IR$ και $h \neq 0$ έχουμε:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{e^x f(h) + e^h f(x) + xh - f(x)}{h} = e^x \frac{f(h)}{h} + \frac{e^h - 1}{h} f(x) + x \,.$$

Αντικαθιστώντας στη δοθείσα σχέση τις μεταβλητές x και y με 0 προκύπτει ότι $f(0) = 0$, οπότε:

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = f'(0)$, αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Επίσης, ισχύει $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$.

Έτσι έχουμε τελικά:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = e^x f'(0) + f(x) + x \,.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το IR και ισχύει

$$f'(x) = f(x) + f'(0)e^x + x$$

για κάθε $x \in$ IR.

<u>Προτεινόμενη άσκηση</u>: Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to IR$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$ ισχύει η σχέση:

$$f(xy) = f(x) + f(y) + \kappa, \text{ όπου } \kappa \in IR.$$

Αν η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο e^2 και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στη διχοτόμο της πρώτης και τρίτης γωνίας, να βρείτε τον τύπο της f και την τιμή του κ.

5. Σύνολο τιμών συνάρτησης – Πλήθος πραγματικών ριζών εξίσωσης

Η εύρεση του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης f για ένα διάστημα Δ στο οποίο ορίζεται μπορεί να γίνει είτε γραφικά προβάλλοντας την γραφική παράσταση της f στον άξονα $y'y$, είτε αλγεβρικά, είτε με τη βοήθεια της μονοτονίας και της συνέχειας της f στο διάστημα Δ. Εδώ θα ασχοληθούμε με την τρίτη περίπτωση. Αν θέλουμε να βρούμε το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f για μια ένωση διαστημάτων όπου σε κάθε διάστημα η f είναι γνησίως μονότονη και συνεχής, τότε βρίσκουμε τα σύνολα τιμών για κάθε διάστημα χωριστά και τα ενώνουμε.

<u>Παράδειγμα</u>: Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 9x + 2, & x < 3 \\ \\ x^2 - 4x + 5, & x \geq 3 \end{cases}$$

α. Να βρείτε το σύνολο τιμών της *f*.
β. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης *f*(*x*) = 0.

Λύση: α. Μελετώντας την f ως προς τη συνέχεια συμπεραίνουμε ότι είναι παντού συνεχής (στο σημείο $x_0 = 3$ ο έλεγχος γίνεται με τη βοήθεια των πλευρικών ορίων και του ορισμού). Για να μελετήσουμε την f ως προς την μονοτονία βρίσκουμε την παράγωγό της, που είναι:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 12x + 9, & x < 3 \\ \\ 2x - 4, & x > 3 \end{cases}$$

(με τη βοήθεια των πλευρικών ορίων προκύπτει ότι η f στο σημείο $x_0 = 3$ δεν είναι παραγωγίσιμη).

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	‖	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

Επειδή τώρα η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 1]$, $[1, 3]$ και $[3, +\infty)$, το σύνολο τιμών της f είναι:

$$\begin{aligned} f(IR) &= (\lim_{x\to-\infty} f(x), f(1)] \cup [f(3), f(1)] \cup [f(3), \lim_{x\to+\infty} f(x)) \\ &= (-\infty, 6] \cup [2,\ 6) \cup [2, +\infty) \\ &= (-\infty, +\infty) = IR \end{aligned}$$

β. Παρατηρούμε ότι το 0 ανήκει στις τιμές της f που αντιστοιχούν μόνο στο διάστημα $(-\infty, 1]$ και πως η f είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα αυτό.

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία μόνο πραγματική ρίζα.

<u>Σχόλιο</u>: Στο ερώτημα, εάν για την παραπάνω συνάρτηση f απαιτείται να γίνει ο έλεγχος αν είναι παραγωγίσιμη στο συνοριακό σημείο $x_0 = 3$ η απάντηση είναι η εξής: Αν γράψουμε τη συνάρτηση της παραγώγου της f (όπως παραπάνω) τότε απαιτείται, ενώ αν αναφέρουμε απλώς τα διαστήματα μονοτονίας και το είδος μονοτονίας της f για κάθε διάστημα, τότε δεν απαιτείται. Δηλαδή στην περίπτωση αυτή αφού η f είναι συνεχής στο 3 λέμε: Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[1, 3]$ και γνησίως αύξουσα στο $[3, +\infty)$.

<u>Παρατήρηση</u>: Αν μας ζητείται να απαντήσουμε στο ερώτημα: πόσες πραγματικές ρίζες έχει μία εξίσωση της μορφής $f(x) = c$, $c \in IR$ στο D_f, τότε βρίσκουμε τα διαστήματα μονοτονίας της f και εξετάζουμε αν το c ανήκει στις τιμές που παίρνει η f για κάθε διάστημα μονοτονίας της.

<u>Προτεινόμενη άσκηση</u>: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \lambda x^2 + 4$, $\lambda \in IR$.
α. Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ για οποιαδήποτε τιμή του λ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.
γ. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$ για τις διάφορες τιμές του λ.

6. Κανόνες de L' Hospital – Πόσες φορές μπορούμε να παραγωγίζουμε;

Αν θέλουμε να βρούμε ένα όριο της μορφής $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{\varphi(x)}{\sigma(x)}$, $x_0 \in IR$ όπου φ και σ παραγωγίσιμες συναρτήσεις σε περιοχή του x_0 με $\varphi(x_o) = \sigma(x_o) = 0$, τότε συνήθως χρησιμοποιούμε τον κανόνα de L' Hospital, δηλαδή γράφουμε:

$$\lim_{x \to x_o} \frac{\varphi(x)}{\sigma(x)} = \lim_{x \to x_o} \frac{\varphi'(x)}{\sigma'(x)}$$

και στη συνέχεια, για να βρούμε το $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{\varphi'(x)}{\sigma'(x)}$, αντικαθιστούμε το x με x_o και εκτελούμε τις πράξεις. Εδώ όμως χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή, γιατί:

Αν δεν γνωρίζουμε ότι οι συναρτήσεις φ' και σ' είναι συνεχείς στο x_0, τότε δεν μπορούμε να αντικαταστήσουμε το x με το x_0.

Σημειώνεται ότι αυτό ισχύει για παράγωγο οποιασδήποτε τάξης.

Όταν μία τουλάχιστον συνάρτηση από τις φ' και σ' δεν είναι συνεχής στο x_0 ή δεν γνωρίζουμε αν είναι συνεχής στο x_0, τότε εργαζόμαστε όπως στο παράδειγμα που ακολουθεί.

<u>Παράδειγμα</u>: **Δίνεται η συνάρτηση $f : IR \to IR$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο IR. Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο O(0, 0) είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x - 5$, να υπολογίσετε το όριο:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{1-\sigma\upsilon\nu x}.$$

Λύση: Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις των όρων του κλάσματος είναι συνεχείς, οπότε εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των ορίων και αντικαθιστώντας το x με 0 οδηγούμαστε στην απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα de L' Hospital, αφού οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες, παίρνουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{1-\sigma\upsilon\nu x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu x}.$$

Αντικαθιστώντας το x με 0 στις συναρτήσεις των όρων του κλάσματος στο όριο του δεύτερου μέλους της παραπάνω ισότητας (αφού είναι συνεχείς) βρίσκουμε πάλι την απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Τώρα, αφού οι συναρτήσεις των όρων του κλάσματος αυτού είναι παραγωγίσιμες, αν εφαρμόσουμε πάλι τον κανόνα de L' Hospital, τότε δεν θα μπορέσουμε να αντικαταστήσουμε το x με 0 στον αριθμητή, επειδή δεν γνωρίζουμε αν η f' είναι συνεχής στο 0. Γνωρίζουμε όμως ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, οπότε εργαζόμαστε ως εξής:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}}{\frac{\eta\mu x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)-f(0)}{x-0}}{\frac{\eta\mu x}{x}}=\frac{f'(0)}{1}=2$$

Άρα

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{1-\sigma\upsilon\nu x}=2.$$

<u>Προτεινόμενες ασκήσεις</u>: 1. Έστω η συνάρτηση $f: IR \to IR$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in IR$ και η C_f εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στο σημείο που εφάπτεται στον ίδιο άξονα και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=-(x-1)^2(x+2)$.

α. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$ και

β. Αν F είναι η παράγουσα της f της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(1, 0), να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to 1}\frac{F(x)}{f(x)}$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f: IR \to IR$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο IR. Αν η κλίση της C_f στο σημείο Α(1, 3) είναι ίση με 2, να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(e^x)-3}{\eta\mu x}.$$

7. Εύρεση του τύπου μιας συνάρτησης

Πολλές φορές μας δίνεται μία ισότητα την οποία ικανοποιεί μία συνάρτηση και ζητείται να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης αυτής. Εδώ θα μελετήσουμε το πρόβλημα σε δύο γενικές περιπτώσεις, που είναι:

7.1 Η ισότητα περιέχει μία τουλάχιστον παράγωγο της ζητούμενης συνάρτησης

Στην περίπτωση αυτή προσπαθούμε να σχηματίσουμε κάποιον κανόνα παραγώγισης ή την παράγωγο γνωστής συνάρτησης ώστε με την βοήθεια της αντιπαραγώγισης να μπορέσουμε να βρούμε τον τύπο της συνάρτησης.

<u>Παράδειγμα:</u> Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : IR \to IR$ με $f(0) = -1$. Αν για κάθε $x \in IR$ ισχύουν οι σχέσεις $f(x) \neq 0$ και $f\,'(x) = 2xf^{\,2}(x)$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Λύση: Όπως προαναφέραμε, πρέπει να σχηματίσουμε έναν κανόνα παραγώγισης που να περιέχει την f. Αυτό επιβάλλει να φέρουμε την παράσταση $f^{\,2}(x)$ στο πρώτο μέλος της ισότητας. Το ότι δεν μηδενίζεται η f μας προϊδεάζει να διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της ισότητας με την παράσταση $f^{\,2}(x)$. Έτσι έχουμε διαδοχικά:

$$f'(x) = 2xf^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x \Leftrightarrow -\frac{f'(x)}{f^2(x)} = -2x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \left(-x^2\right)'$$

Από την τελευταία ισότητα παίρνουμε:

$$\frac{1}{f(x)} = -x^2 + c,$$

όπου c μία σταθερά, η τιμή της οποίας θα προσδιοριστεί με τη βοήθεια της τιμής της f που μας δίνεται.

Αντικαθιστώντας λοιπόν το x με 0 στην τελευταία ισότητα παίρνουμε:

$$\frac{1}{f(0)} = -0^2 + c \Leftrightarrow c = -1,$$

(αφού $f(0) = -1$).

Άρα ο τύπος της συνάρτησης f είναι:

$$f(x) = -\frac{1}{x^2+1}.$$

7.2 Η ισότητα περιέχει παράγουσα κάποιας συνάρτησης στην οποία περιέχεται η ζητούμενη συνάρτηση

Εδώ πρώτα παραγωγίζουμε τα μέλη της δοθείσας ισότητας ή μιας ισοδύναμής της και στη συνέχεια βρίσκουμε τη συνάρτηση όπως προηγουμένως. Χαρακτηριστικό είναι το επόμενο παράδειγμα.

<u>Παράδειγμα:</u> Έστω $f : (0, +\infty) \to IR$ μία συνεχής συνάρτηση και G η παράγουσα συνάρτηση της $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το

σημείο Α(1, 0). Αν για κάθε $x > 0$ ισχύει η σχέση $f(x) = x + G(x)$, να βρείτε τον τύπο της f.

Λύση: Προφανώς η f είναι παραγωγίσιμη, οπότε παραγωγίζοντας τα μέλη της δοθείσας ισότητας παίρνουμε:

$$f'(x) = 1 + \frac{f(x)}{x},\ \ x > 0.$$

Η ισότητα αυτή για $x > 0$ είναι ισοδύναμη με την ισότητα:

$$\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{1}{x} \quad \text{ή} \quad \text{την ισότητα} \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = (\ln x)'.$$

Από την τελευταία ισότητα παίρνουμε:

$$\frac{f(x)}{x} = \ln x + c \qquad (1)$$

όπου c προσδιοριστέα σταθερά.

Για να προσδιορίσουμε τώρα την σταθερά c αντικαθιστούμε στη δοθείσα ισότητα το x με 1 και παίρνουμε $f(1) = 1$. Στη συνέχεια αντικαθιστώντας στην (1) το x με 1 βρίσκουμε c = 1. Άρα ο τύπος της συνάρτησης f είναι:

$$f(x) = x + x\ln x\ .$$

<u>**Σχόλιο:**</u> Αν ονομάσουμε h τη συνάρτηση του δευτέρου μέλους της δοθείσας ισότητας, τότε στην ουσία βρήκαμε τον παραπάνω τύπο για την f από την ισότητα $f'(x) = h'(x)$. Πώς είμαστε σίγουροι ότι ο τύπος αυτός θα επαληθεύει και την ισότητα που δίνεται, αφού η ισότητα που προκύπτει με την παραγώγιση δεν είναι ισοδύναμη της δοθείσας; Μήπως πρέπει να αντικαταστήσουμε τον τύπο της f που βρήκαμε στην ισότητα που δίνεται για να δούμε αν την επαληθεύει;

Η απάντηση είναι πως στην προκειμένη περίπτωση αυτό δεν είναι αναγκαίο, διότι:

Αφού βρήκαμε μία τιμή της f από την δοθείσα ισότητα, εξυπακούεται πως ο τύπος της f που βρήκαμε θα επαληθεύει και την ισότητα αυτή.

Πράγματι, έχουμε τις σχέσεις:

$$\text{(i)} \quad f'(x) = h'(x),\ \ x > 0 \ \ \&$$

$$\text{(ii)} \quad f(1) = h(1)$$

Από την (i) συνεπάγεται ότι $f = h + c$ και από την (ii) ότι c = 0.
Άρα τελικά έχουμε $f = h$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η παραπάνω διαδικασία αποτελεί και μία μέθοδο απόδειξης της ισότητας δύο συναρτήσεων.

<u>**Προτεινόμενη άσκηση**</u>**: Έστω $f\ :\ [0, +\infty) \to IR$ μία συνεχής συνάρτηση, η οποία για κάθε $x \geq 0$ ικανοποιεί τις σχέσεις $f(x) \neq 0$ και**

$$f(x) = 1 - x\int_0^1 f^2(xt)dt\ .$$

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης *f*.

Υπόδειξη: Επειδή η ανεξάρτητη μεταβλητή x της συνάρτησης f βρίσκεται στο όρισμα της συνάρτησης που είναι στο ολοκλήρωμα, θέτουμε $u = xt$ (για να την βγάλουμε έξω) και παίρνουμε διαδοχικά:

$$f(x) = 1 - x\int_0^1 f^2(xt)dt = 1 - \int_0^1 f^2(xt)xdt = 1 - \int_0^x f^2(u)du$$

και συνεχίζουμε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα.