ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

(η τεχνική του "*αρκεί να αποδείξουμε ότι ...*")

Παναγιώτης Λ. Θεοδωρόπουλος
Σχολικός Σύμβουλος κλάδου ΠΕ03

Π Ρ Ο Λ Ο Γ Ο Σ

Οι σημειώσεις αυτές γράφτηκαν με σκοπό να βοηθήσουν τους μαθητές της Α' Λυκείου στην πρώτη τους συστηματική επαφή με τις **ασκήσεις απόδειξης** στη Γεωμετρία και περιέχουν:

1. Γενικές οδηγίες αντιμετώπισης μιας άσκησης απόδειξης στη Γεωμετρία όπου δίνεται έμφαση στην τεχνική του "*αρκεί να αποδείξουμε ότι ...*".
2. Ειδικές περιπτώσεις συμπερασμάτων που αναφέρονται στην ύλη της Γεωμετρίας της Α' Λυκείου και
3. Ασκήσεις λυμένες υποδειγματικά.

Οι ασκήσεις της Γεωμετρίας στην πλειονότητά τους είναι ασκήσεις απόδειξης. Συναντάμε όμως και προβλήματα κατασκευής ενός σχήματος, προβλήματα υπολογισμού ενός μεγέθους, προβλήματα εύρεσης ενός γεωμετρικού τόπου κλπ.

Στις ασκήσεις απόδειξης ζητείται συνήθως να αποδειχθεί ότι αν ισχύει μία πρόταση ***P*** (**Υπόθεση**), τότε θα ισχύει μία άλλη πρόταση ***Q*** (**Συμπέρασμα**).

Αξίζει να αναφερθεί ότι η Γεωμετρία (θεωρία και ασκήσεις) συμβάλλει σημαντικά στην ανάπτυξη της αναλυτικής, διαισθητικής και κριτικής σκέψης. Χαρακτηριστικά είναι τα δύο ιστορικά στοιχεία που ακολουθούν στα οποία φαίνεται η μεγάλη αξία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Α. Ο Πλάτων, ο οποίος αντιμετώπιζε τα Μαθηματικά καθαρά ως αντικείμενο στοχασμού, θεωρούσε τη Γεωμετρία ως προπαιδευτικό μάθημα για τη Φιλοσοφία και γι' αυτό στην είσοδο της Ακαδημίας είχε τοποθετήσει μία επιγραφή με τη φράση:

«Μηδείς αγεωμέτρητος εισίτω ...».

Β. Όταν ο βασιλιάς της Αιγύπτου Πτολεμαίος Α΄, γοητευμένος από τα Στοιχεία του Ευκλείδη, ζήτησε από τον Ευκλείδη να του υποδείξει έναν πιο εύκολο τρόπο για να μάθει Γεωμετρία, τότε ο τελευταίος του απάντησε με την ιστορική φράση:

«Δεν υπάρχει βασιλική οδός για την Γεωμετρία».

Μπορεί λοιπόν τα μονοπάτια της Γεωμετρίας να είναι δύσβατα, αξίζει όμως τον κόπο να τα διαβεί κανείς, γιατί κρύβουν αρκετή γοητεία και επιφυλάσσουν πολλές εκπλήξεις!

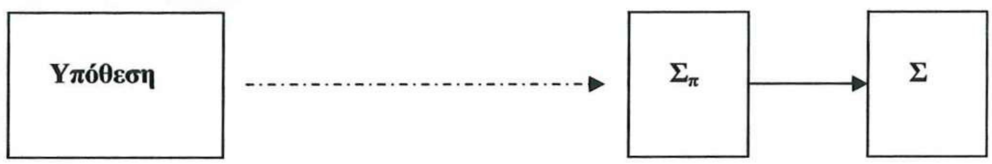
<u>Γ Ε Ν Ι Κ Ε Σ   Ο Δ Η Γ Ι Ε Σ</u>

Πρέπει να γνωρίζουμε ότι στη Γεωμετρία κάθε άσκηση αποτελεί σχεδόν ιδιαίτερη περίπτωση και επομένως δεν είναι εύκολο να δώσουμε ειδική μεθοδολογία για τη λύση όλων των ασκήσεων. Ωστόσο, μπορούμε να δώσουμε κάποιες γενικές οδηγίες. Έτσι λοιπόν, για να λύσουμε μία **άσκηση απόδειξης** στη Γεωμετρία συνήθως ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα.

1. **Διαβάζουμε προσεκτικά την άσκηση και απομονώνουμε τα βασικά της μέρη, δηλαδή ξεχωρίζουμε την Υπόθεση και το Συμπέρασμα.**
   Αυτό θα μας βοηθήσει και να κατανοήσουμε καλύτερα την άσκηση, αλλά και αν έχουμε καταγράψει τα στοιχεία της σε πίνακα, να έχουμε καλύτερη πρόσβαση σ' αυτά, ώστε να μην τα ξεχνάμε.

2. **Στη συνέχεια, κάνουμε ένα καλό σχήμα το οποίο θα πρέπει να ανταποκρίνεται στα δεδομένα της άσκησης. Ίσως χρειασθεί να χαράξουμε και κάποια ή κάποιες βοηθητικές γραμμές (ευθείες ή κύκλους). Αυτό εξαρτάται φυσικά από την άσκηση (υπόθεση, συμπέρασμα, θεωρία κλπ.).**
   Μία καλή συνήθεια εδώ είναι να σημειώνουμε πάνω στο σχήμα στα ίσα στοιχεία το ίδιο σύμβολο καθώς και τη σχέση διαφόρων μεγεθών, είτε αυτά δίνονται εξ' αρχής είτε προκύπτουν κατά την πορεία της λύσης της άσκησης. Αυτό, και θα μας υπενθυμίζει τα στοιχεία της άσκησης, όταν σκεπτόμαστε για να την λύσουμε, αλλά και γενικότερα μπορεί να μας βοηθήσει να συλλάβουμε και κάποια ιδέα για τη λύση.

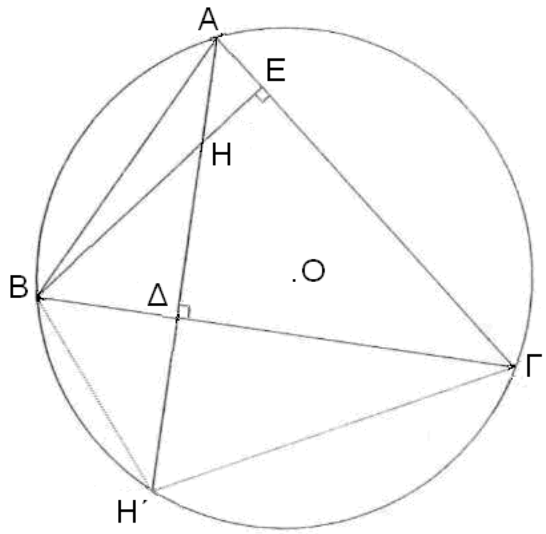
3. **Σε πολλές ασκήσεις απόδειξης μια τακτική που συνήθως ακολουθούμε είναι η τεχνική του <u>«αρκεί να αποδείξουμε ότι</u> ...», δηλ. αν θέλουμε να αποδείξουμε την αλήθεια ενός Συμπεράσματος Σ, τότε παρατηρούμε λαμβάνοντας υπόψη τα στοιχεία της άσκησης, τί πρέπει να ισχύει ($Σ_π$) για να εξαχθεί το συμπέρασμα Σ. Στη συνέχεια προσπαθούμε να αποδείξουμε το συμπέρασμα $Σ_π$.**
   Σχηματικά η διαδικασία αυτή μπορεί να αποδοθεί ως εξής:



4. **Κατόπιν συνδέουμε την υπόθεση με την αντίστοιχη θεωρία (ορισμούς, θεωρήματα κλπ.), ώστε να εξάγουμε τα κατάλληλα ενδιάμεσα συμπεράσματα ή αποτελέσματα, τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια. Στο βήμα αυτό πρέπει να αναρωτιόμαστε πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κάθε στοιχείο της υπόθεσης, ώστε να οδηγηθούμε στο συμπέρασμα. Εννοείται βέβαια ότι πρέπει να γνωρίζουμε πολύ καλά την αντίστοιχη θεωρία.**
   Η διαδικασία αυτή είναι πολύ σημαντική, διότι σκιαγραφεί την πορεία της απόδειξης.

Η παραπάνω τεχνική θα κατανοηθεί καλύτερα με τη βοήθεια του επόμενου παραδείγματος.

<u>**Παράδειγμα**</u>**: Να αποδειχθεί ότι το συμμετρικό του ορθόκεντρου ενός τριγώνου ΑΒΓ ως προς κάθε πλευρά του είναι σημείο του περιγεγραμμένου του κύκλου.** (Δείτε το παρακάτω σχήμα για οξυγώνιο τρίγωνο).



<u>Υπόδειξη</u>

(Αρκεί να αποδειχθεί για τη μία πλευρά, έστω την ΒΓ. Για τα άλλες δύο η απόδειξη είναι ίδια).

<u>1ος τρόπος</u> (Άμεσα. *Δεν έχουμε φέρει τον περιγεγραμμένο κύκλο*)**:** Έστω Η' το συμμετρικό του Η ως προς τη ΒΓ. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι το Η' είναι σημείο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ. Για να αποδειχθεί αυτό, **αρκεί να αποδείξουμε ότι** το τετράπλευρο ΑΒΗ'Γ είναι εγγράψιμο.

<u>2ος τρόπος</u> (Έμμεσα. *Έχουμε φέρει τον περιγεγραμμένο κύκλο*)**:** Προεκτείνουμε το ύψος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ μέχρι να τμήσει τον περιγεγραμμένο του κύκλο. Έστω Η' το σημείο τομής. Για να εξαχθεί το συμπέρασμα, **αρκεί να αποδείξουμε ότι** το Η' είναι το συμμετρικό του Η ως προς τη ΒΓ και για να αποδειχθεί αυτό, **αρκεί να αποδείξουμε ότι** το τρίγωνο ΒΗΗ' είναι ισοσκελές με βάση την ΗΗ΄.

Ανάλογα εργαζόμαστε και αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο ή αμβλυγώνιο.

Ε Ι Δ Ι Κ Ε Σ Π Ε Ρ Ι Π Τ Ω Σ Ε Ι Σ Σ Υ Μ Π Ε Ρ Α Σ Μ Α Τ Ω Ν

Ενδεικτικά αναφέρουμε μερικές περιπτώσεις συμπερασμάτων **Σ** (*που θέλουμε να αποδείξουμε*) με αντίστοιχα συμπεράσματα $\mathbf{\Sigma_\pi}$ (*τα οποία αρκεί να αποδείξουμε*). **Η** επιλογή του $\mathbf{\Sigma_\pi}$ κάθε φορά εξαρτάται από τα στοιχεία της άσκησης. Βέβαια το θέμα παραμένει ανοικτό γιατί δεν εξαντλούνται εύκολα όλες οι περιπτώσεις.

Ι Ίσα ευθύγραμμα τμήματα

Για να αποδείξουμε ότι δύο ευθύγραμμα τμήματα είναι ίσα, **αρκεί να αποδείξουμε ότι**

- είναι αντίστοιχες πλευρές δύο ίσων τριγώνων (θα αποδείξουμε φυσικά ότι τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα) ή ότι
- είναι αθροίσματα ή διαφορές ίσων τμημάτων ή ότι
- είναι οι ίσες πλευρές ενός ισοσκελούς τριγώνου ή πλευρές ισόπλευρου τριγώνου ή ότι
- το καθένα είναι ίσο με κάποιο τρίτο ευθύγραμμο τμήμα ή ότι
- είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου ή ότι
- είναι διαγώνιες ορθογωνίου ή ισοσκελούς τραπεζίου ή ότι
- είναι χορδές ίσων τόξων ή ότι
- είναι τα εφαπτόμενα τμήματα που φέρνουμε προς ένα κύκλο από ένα σημείο εκτός αυτού ή ότι
- είναι ακτίνες του ίδιου κύκλου ή ότι
- είναι χορδές ενός κύκλου ή δύο ίσων κύκλων και έχουν ίσα αποστήματα ή ότι
- ορίζονται πάνω σε μια ευθεία που τέμνεται από παράλληλες ευθείες, οι οποίες ορίζουν ίσα τμήματα σε μια άλλη ευθεία που τις τέμνει ή ότι …

♦

ΙΙ Ίσες γωνίες

Για να αποδείξουμε ότι δύο γωνίες είναι ίσες, **αρκεί να αποδείξουμε ότι**

- είναι αντίστοιχες γωνίες δύο ίσων τριγώνων ή ότι
- η καθεμία είναι ίση με κάποια τρίτη γωνία ή ότι
- είναι ίσες μία προς μία με δύο άλλες γωνίες που είναι ίσες μεταξύ τους ή ότι
- είναι κατακορυφήν ή ότι
- είναι αθροίσματα ή διαφορές ίσων γωνιών ή ότι

- είναι παραπληρώματα ή συμπληρώματα της ίδιας γωνίας ή ίσων γωνιών ή ότι
- είναι οι προσκείμενες γωνίες στη βάση ενός ισοσκελούς τριγώνου ή ενός ισοσκελούς τραπεζίου ή ότι
- είναι επίκεντρες ή εγγεγραμμένες στον ίδιο κύκλο ή σε ίσους κύκλους και βαίνουν σε ίσα τόξα ή ότι
- είναι εντός εναλλάξ ή εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη δύο παραλλήλων ευθειών που τέμνονται από μία τρίτη ευθεία ή ότι
- είναι απέναντι γωνίες ενός παραλληλογράμμου ή ότι
- η μία γωνία, έστω φ, σχηματίζεται από μία χορδή ενός κύκλου και την εφαπτομένη του στο ένα άκρο της χορδής αυτής και η άλλη είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο αυτό και βαίνει στο τόξο της χορδής που περιέχεται στην φ ή ότι
- οι κορυφές τους είναι διαδοχικές κορυφές εγγράψιμου τετραπλεύρου και οι πλευρές τους διέρχονται από τα άκρα της απέναντι πλευράς ή ότι
- έχουν τις πλευρές τους παράλληλες ή κάθετες μία προς μία και είναι και οι δύο οξείες ή και οι δύο αμβλείες ή ότι ...

♦

III Δύο ευθύγραμμα τμήματα έχουν κοινό μέσο

(*Ανάλογα εργαζόμαστε και για να αποδείξουμε ότι δύο γωνίες έχουν κοινή διχοτόμο ή δύο τόξα κοινό μέσο*).

Για να αποδείξουμε ότι δύο ευθύγραμμα τμήματα έχουν κοινό μέσο, **αρκεί να αποδείξουμε ότι**

- το μέσο του ενός είναι και μέσο του άλλου ή ότι
- το ένα βρίσκεται στο εσωτερικό του άλλου και τα τμήματα που περιέχονται ανάμεσά τους είναι ίσα (τα τμήματα έχουν τον ίδιο φορέα) ή ότι
- (*μόνο για ευθύγραμμα τμήματα*) είναι διαγώνιες παραλληλογράμμου ή ότι ...

♦

IV Δύο ευθείες ταυτίζονται

Για να αποδείξουμε ότι δύο ευθείες ταυτίζονται, **αρκεί να αποδείξουμε ότι**

- είναι παράλληλες μεταξύ τους και διέρχονται από το ίδιο σημείο ή ότι
- είναι παράλληλες στην ίδια ευθεία και διέρχονται από το ίδιο σημείο ή ότι

- είναι κάθετες στην ίδια ευθεία και διέρχονται από το ίδιο σημείο ή ότι
- αν τέμνουν στο ίδιο σημείο, έστω Α, μία τρίτη ευθεία (ε) και αν Β και Γ είναι σημεία των δύο ευθειών που βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της (ε) και Δ σημείο της (ε) και ισχύει $B\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{A}\Delta$ ή ότι …

♦

V Τρία σημεία συνευθειακά

Για να αποδείξουμε ότι τρία σημεία, έστω Α, Β, Γ (Β το μεσαίο), είναι συνευθειακά, **αρκεί να αποδείξουμε ότι**

- $A\hat{B}\Gamma = 180°$ ή ότι
- δύο ευθείες που ορίζονται από αυτά π.χ. οι ΑΒ και ΑΓ ταυτίζονται π.χ. είναι κάθετες ή παράλληλες στην ίδια ευθεία ή ότι
- το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ είναι ίσο με το άθροισμα των δύο άλλων ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ και ΒΓ, δηλ. ΑΓ = ΑΒ + ΒΓ ή ότι
- το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΓ είναι ίσο με το άθροισμα των μηκών των δύο άλλων ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ και ΒΓ, δηλ. (ΑΓ) = (ΑΒ) + (ΒΓ) ή ότι
- η ευθεία που ορίζεται από τα δύο σημεία διέρχεται και από το τρίτο σημείο (π.χ. η ευθεία ΑΒ διέρχεται από το σημείο Γ) ή ότι …

♦

VI Ορθογώνιο τρίγωνο

Για να αποδείξουμε ότι ένα τρίγωνο είναι ορθογώνιο, **αρκεί να αποδείξουμε ότι**

- μία γωνία του είναι ορθή ή ότι
- δύο γωνίες του είναι συμπληρωματικές ή ότι
- η διάμεσος που φέρνουμε από μία κορυφή του είναι ίση με το μισό της αντίστοιχης πλευράς ή ότι
- είναι ίσο με ένα άλλο τρίγωνο που ξέρουμε ότι είναι ορθογώνιο ή ότι …

♦

VII Ευθείες κάθετες

Για να αποδείξουμε ότι δύο ευθείες είναι κάθετες, **αρκεί να αποδείξουμε ότι**

- σχηματίζεται ορθογώνιο τρίγωνο με κορυφή της ορθής γωνίας το σημείο τομής τους. (Φυσικά πρέπει να αποδείξουμε ότι το τρίγωνο αυτό είναι ορθογώνιο) ή ότι
- σχηματίζουν γωνία 90° ή ότι
- ημιευθείες τους με αρχή το κοινό τους σημείο είναι διχοτόμοι δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών ή ότι
- η μία είναι η μεσοκάθετος ενός ευθυγράμμου τμήματος του οποίου φορέας είναι η άλλη ή ότι
- στη μία ευθεία ανήκει η διχοτόμος ή η διάμεσος που ξεκινά από την κορυφή ενός ισοσκελούς τριγώνου και στην άλλη ευθεία ανήκει η βάση του τριγώνου αυτού ή ότι
- ένα τμήμα της μιας ευθείας είναι πλευρά ενός τριγώνου και η άλλη ευθεία διέρχεται από την απέναντι κορυφή του τριγώνου αυτού και από το ορθόκεντρό του ή ότι
- είναι παράλληλες μία προς μία με δύο άλλες ευθείες, που γνωρίζουμε ότι είναι κάθετες μεταξύ τους ή ότι
- η μία ευθεία είναι παράλληλη σε μια τρίτη ευθεία, που γνωρίζουμε ότι είναι κάθετη στην άλλη ή ότι
- τμήματά τους είναι διαγώνιες ρόμβου ή ότι
- η μία είναι εφαπτομένη ενός κύκλου και η άλλη διέρχεται από το σημείο επαφής και το κέντρο του κύκλου ή ότι ...

♦

VIII Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος

Για να αποδείξουμε ότι μία ευθεία είναι μεσοκάθετος ενός ευθυγράμμου τμήματος, **αρκεί να αποδείξουμε ότι**

- διέρχεται από το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος και είναι κάθετη σ' αυτό ή ότι
- διέρχεται από το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος και ένα σημείο της ισαπέχει από τα άκρα του ή ότι
- δύο σημεία της ισαπέχουν από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος ή ότι ...

♦

IX Τρεις ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο (συντρέχουν)

Για να αποδείξουμε ότι τρεις ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο, **αρκεί να αποδείξουμε ότι**

- τμήματά τους είναι δευτερεύοντα στοιχεία ενός τριγώνου, δηλ. διχοτόμοι, ύψη ή διάμεσοι ή ότι
- είναι μεσοκάθετες των πλευρών ενός τριγώνου ή ότι
- οι δύο ευθείες τέμνονται σε ένα σημείο και από αυτό το σημείο διέρχεται και η τρίτη ευθεία ή ότι
- δύο από τις ευθείες τέμνονται σε ένα σημείο, έστω Α και άλλες δύο (μία ευθεία θα είναι και στα δύο ζεύγη) τέμνονται σε ένα σημείο, έστω Β και τα δύο σημεία Α και Β ταυτίζονται ή ότι
- οι δύο ευθείες τέμνονται σε ένα σημείο και η ευθεία που ορίζεται από το σημείο τομής τους και από ένα σημείο της τρίτης ευθείας είναι η τρίτη ευθεία ή ότι ...

♦

X Μέσο ευθυγράμμου τμήματος

Για να αποδείξουμε ότι ένα σημείο (έστω Μ) ενός ευθυγράμμου τμήματος (έστω ΑΒ) είναι μέσο του ευθυγράμμου τμήματος **αρκεί να αποδείξουμε ότι**

- ΜΑ = ΜΒ (δείτε απόδειξη ισότητας ευθυγράμμων τμημάτων) ή ότι
- το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι διαγώνιος παραλληλογράμμου και το σημείο Μ είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του ή ότι
- το τμήμα ΑΒ είναι πλευρά τριγώνου και το σημείο Μ είναι το σημείο που τέμνει την πλευρά ΑΒ η διάμεσος από την απέναντι κορυφή (δηλ. η ευθεία που άγεται από την απέναντι κορυφή και διέρχεται από το βαρύκεντρο του τριγώνου) ή ότι

- το τμήμα ΑΒ είναι πλευρά τριγώνου και το σημείο Μ είναι το σημείο τομής της ΑΒ με την παράλληλη που άγεται από το μέσο μιας άλλης πλευράς προς την τρίτη πλευρά του τριγώνου ή ότι …

♦

XI Παράλληλες ευθείες

Για να αποδείξουμε ότι δύο ευθείες είναι παράλληλες μεταξύ τους **αρκεί να αποδείξουμε ότι**

- τμήματά τους είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου ή ότι
- είναι κάθετες στην ίδια ευθεία σε διαφορετικά σημεία ή ότι
- τέμνονται από μία τρίτη ευθεία και δύο εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες ή δύο εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι ίσες ή δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι παραπληρωματικές ή ότι
- καθεμία είναι παράλληλη προς μία τρίτη ευθεία ή ότι
- τέμνουν δύο άλλες τεμνόμενες; ευθείες και ορίζουν πάνω σ' αυτές ανάλογα τμήματα ή ότι
- η μία ευθεία διέρχεται από τα μέσα των πλευρών ενός τριγώνου και η άλλη είναι φορέας της τρίτης πλευράς του τριγώνου αυτού ή ότι
- η μία ευθεία διέρχεται από τα μέσα των μη παραλλήλων πλευρών ενός τραπεζίου και η άλλη είναι φορέας μιας βάσης του τραπεζίου αυτού ή ότι …

♦

XII Εφαπτομένη κύκλου

Για να αποδείξουμε ότι μία ευθεία εφάπτεται σε ένα κύκλο, **αρκεί να αποδείξουμε ότι**

- είναι κάθετη σε μία ακτίνα του κύκλου στο άκρο της ακτίνας που είναι σημείο του κύκλου ή ότι
- τέμνει τον κύκλο σε ένα σημείο, έστω Μ, και η γωνία ω που σχηματίζει με μία χορδή του κύκλου της οποίας ένα άκρο είναι το Μ είναι ίση με κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο τόξο της χορδής που περιέχεται στην ω ή ότι
- το κάθετο τμήμα που φέρνουμε από το κέντρο του κύκλου προς την ευθεία είναι ίσο με την ακτίνα του κύκλου ή ότι ...

♦

XIII Ισοσκελές τρίγωνο

Για να αποδείξουμε ότι ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές, αρκεί να αποδείξουμε **ότι**

- δύο πλευρές του είναι ίσες ή ότι
- δύο γωνίες του είναι ίσες ή ότι
- ένα ύψος του είναι και διχοτόμος ή διάμεσος ή ότι
- μία διχοτόμος του είναι και ύψος ή διάμεσος ή ότι
- μία διάμεσος του είναι και ύψος ή διχοτόμος ή ότι ...

♦

XIV Διχοτόμος γωνίας

Για να αποδείξουμε ότι μία ημιευθεία είναι διχοτόμος μιας γωνίας, **αρκεί να αποδείξουμε ότι**

- η ημιευθεία αυτή σχηματίζει ίσες γωνίες με τις πλευρές της γωνίας ή ότι
- ένα σημείο της ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας ή ότι
- η γωνία είναι γωνία ενός τριγώνου και η ημιευθεία έχει ως αρχή την αντίστοιχη κορυφή του τριγώνου αυτού και διέρχεται από το έγκεντρό του ή ότι
- η γωνία είναι η γωνία των ίσων πλευρών ισοσκελούς τριγώνου και η ημιευθεία έχει αρχή την κορυφή του τριγώνου αυτού και είναι κάθετη στη βάση ή διέρχεται από το μέσο της βάσης ή ότι …

♦

XV Παραλληλόγραμμο – ορθογώνιο – ρόμβος - τετράγωνο

Για να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο, ρόμβος ή τετράγωνο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα από τα αντίστοιχα κριτήρια που αναφέρονται στο σχολικό βιβλίο.

Π Α Ρ Α Δ Ε Ι Γ Μ Α Τ Α

Ως εφαρμογή των παραπάνω ας δούμε τρεις ασκήσεις λυμένες υποδειγματικά. Στην παρουσίαση της λύσης (τετράδιο, διαγώνισμα) θα γράφουμε οπωσδήποτε τη διαδικασία της απόδειξης και ό,τι άλλο κρίνεται απαραίτητο.

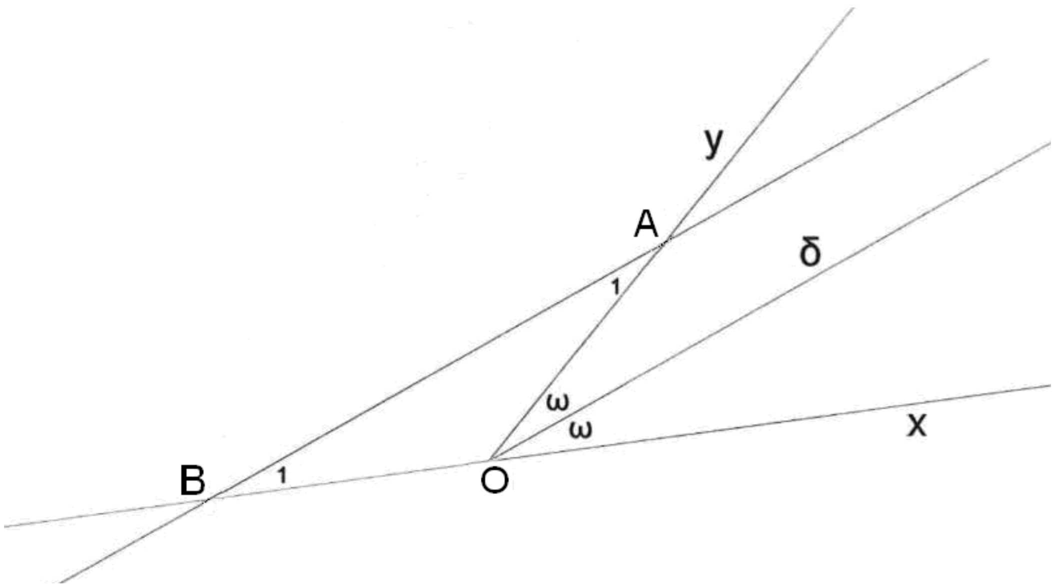
1° παράδειγμα: Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και η διχοτόμος της Οδ. Από σημείο Α της Ο*y* φέρνουμε παράλληλη προς την Οδ που τέμνει την προέκταση της Ο*x* στο Β. Να αποδείξετε ότι ΟΑ = ΟΒ.

Λύση

Τα βασικά μέρη της άσκησης

Υπόθεση	**Οδ** διχοτόμος της $x\hat{O}y$, **Α** τυχαίο σημείο της **Ο*y*** και **ΑΒ ‖ Οδ** (**Β** σημείο της προέκτασης της **Ο*x*** προς το Ο).
Συμπέρασμα	ΟΑ = ΟΒ.

Κατασκευή του σχήματος



«Αρκεί να αποδείξουμε ότι ...»

Ζητείται να αποδείξουμε ότι **ΟΑ = ΟΒ (Συμπέρασμα).** Για να αποδειχθεί αυτό, **αρκεί να αποδείξουμε** ότι το τρίγωνο **ΟΑΒ** είναι ισοσκελές και για να αποδειχθεί αυτό, **αρκεί να αποδείξουμε** ότι $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$.
(Λόγω των παραλλήλων ευθειών και της διχοτόμου είναι ευκολότερο να βρούμε σχέσεις μεταξύ γωνιών).

Σύνδεση των δεδομένων με τη θεωρία

- Η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}y$. Αυτό σημαίνει ότι χωρίζει τη γωνία σε δύο ίσες γωνίες. (Στο σχήμα στις ίσες γωνίες έχουμε σημειώσει το γράμμα ω).
- ΑΒ || Οδ. Παρατηρούμε ότι οι ευθείες αυτές τέμνονται από τις Ο*y* και Ο*x*, οπότε θα ισχύουν όλα τα συμπεράσματα του θεωρήματος των παραλλήλων ευθειών (εντός εναλλάξ γωνίες ίσες κλπ. ...).

Απόδειξη

Έχουμε:
$\hat{A}_1 = A\hat{O}\delta$ (1), ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και Οδ με τέμνουσα την Οy.
$\hat{B}_1 = x\hat{O}\delta$ (2), ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ και Οδ με τέμνουσα τη Β*x*.
$A\hat{O}\delta = x\hat{O}\delta$ (3), επειδή η Οδ είναι διχοτόμος της $x\hat{O}y$.
Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$.
Άρα το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές και επομένως ΟΑ = ΟΒ.

♦

<u>2^{o} παράδειγμα</u>: Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΒΓ = 2ΑΒ και $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 90^\circ$.

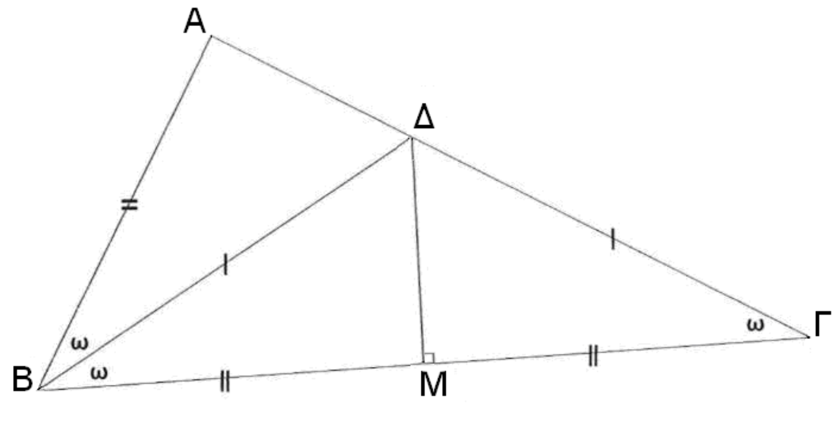
Λύση

Τα βασικά μέρη της άσκησης

Υπόθεση	ΑΒΓ τρίγωνο με ΒΓ = 2ΑΒ και $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$
Συμπέρασμα	$\hat{A} = 90^\circ$

Κατασκευή του σχήματος

Η άσκηση αυτή είναι λίγο διαφορετική από την προηγούμενη, γιατί χρειάζεται να χαράξουμε και κάποιες γραμμές (βοηθητικές). Σ' αυτό μας κατευθύνει η υπόθεση. Τη σχέση των γωνιών **Β** και **Γ** μπορούμε να την εκφράσουμε στο σχήμα φέρνοντας τη διχοτόμο της γωνίας **Β** και θέτοντας στις ίσες γωνίες το γράμμα ω. Επίσης, τη σχέση των πλευρών **ΒΓ** και **ΑΒ** μπορούμε να την εκφράσουμε σημειώνοντας το μέσο **Μ** της **ΒΓ** και θέτοντας στα ίσα τμήματα το ίδιο σύμβολο (δύο μικρές γραμμές). Τέλος, παρατηρούμε ότι σχηματίζεται ένα ισοσκελές τρίγωνο, το **ΔΒΓ,** οπότε φέρνουμε και τη διάμεσό του **ΔΜ,** (η διάμεσος ενός ισοσκελούς τριγώνου που άγεται από την κορυφή είναι γενικά μία καλή βοηθητική γραμμή). Έτσι έχουμε το παρακάτω σχήμα:



«Αρκεί να αποδείξουμε ότι ...»

Ζητείται να αποδείξουμε ότι $\hat{A} = 90^o$ **(Συμπέρασμα).** Μια πρώτη σκέψη θα ήταν να αποδείξουμε ότι $A\hat{B}\Gamma + A\hat{\Gamma}B = 90^o$. Αυτό όμως δε μπορεί να αποδειχθεί με τα στοιχεία της υπόθεσης ανεξάρτητα από την γωνία Α. Παρατηρούμε όμως ότι αν $\hat{A} = 90^o$, τότε τα τρίγωνα **ΑΒΔ** και **ΜΔΒ** είναι ίσα. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι τα τρίγωνα **ΑΒΔ** και **ΜΔΒΜ** είναι ίσα.

Σύνδεση των δεδομένων με τη θεωρία

- Με τη βοήθεια της διχοτόμου **ΒΔ** της γωνίας **Β** που φέραμε ως βοηθητική, ορίζεται το ισοσκελές τρίγωνο **ΔΒΓ,** αφού έχει δύο γωνίες ίσες.
- Η διάμεσος **ΔΜ** του ισοσκελούς τριγώνου **ΔΒΓ,** που φέραμε από την κορυφή, είναι και ύψος και διχοτόμος.

Απόδειξη

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα **ΑΒΔ** και **ΜΔΒ.** Τα τρίγωνα αυτά έχουν:

1. ΑΒ = ΜΒ, αφού ΒΓ = 2ΑΒ και το Μ είναι μέσο της ΒΓ.
2. ΒΔ = ΒΔ (κοινή) και
3. $\Delta\hat{B}A = \Delta\hat{B}M = \frac{\hat{B}}{2}$ (ΒΔ διχοτόμος).

Από τις παραπάνω ισότητες προκύπτει ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΜΔΒ είναι ίσα (κριτήριο ΠΓΠ), οπότε $B\hat{A}\Delta = \Delta\hat{M}B$. Αλλά $\Delta\hat{M}B = 90^o$, γιατί η διάμεσος ΔΜ του ισοσκελούς τριγώνου ΔΒΓ είναι και ύψος. Άρα $\hat{A} = 90^o$.

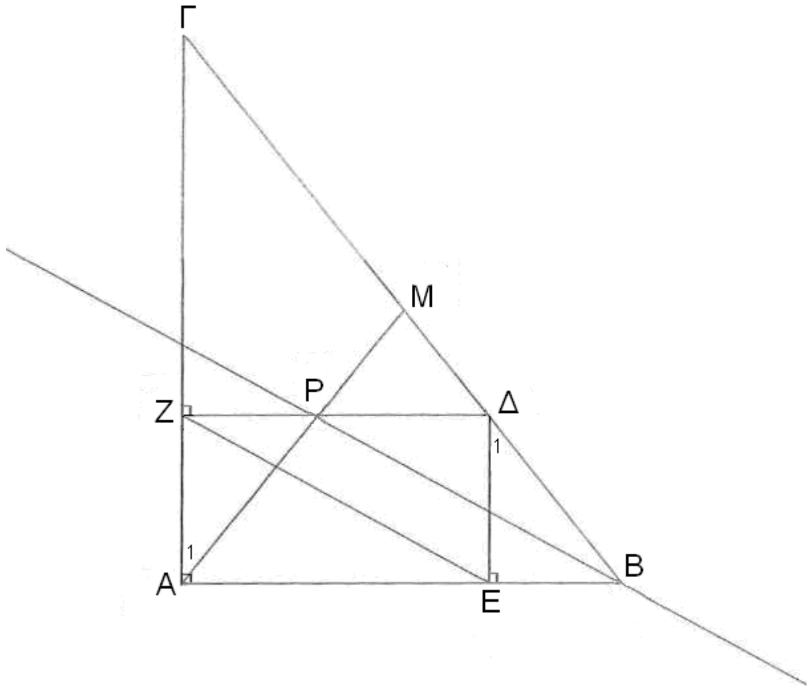
<u>3° παράδειγμα</u>: Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) και η διάμεσός του ΑΜ. Αν Δ ένα εσωτερικό σημείο του ΒΜ και Ε, Ζ οι προβολές του Δ στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
Η διάμεσος ΑΜ, το τμήμα ΔΖ και η παράλληλη από το Β προς την ΕΖ συντρέχουν.

<u>Λύση</u>

<u>Τα βασικά μέρη της άσκησης</u>

Υπόθεση	Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} = 90^\circ$, ΑΜ διάμεσος, Δ εσωτερικό σημείο του ΒΜ , $ΔΕ \perp ΑΒ$ και $ΔΖ \perp ΑΓ$.
Συμπέρασμα	Οι ευθείες ΑΜ, ΔΖ και η παράλ/λη από το Β προς την ΕΖ συντρέχουν.

<u>Κατασκευή του σχήματος</u>



<u>«Αρκεί να αποδείξουμε ότι ...»</u>

Ζητείται να αποδείξουμε ότι τα τμήματα **ΑΜ, ΔΖ** και η παράλληλη από το **Β** προς την **ΕΖ** συντρέχουν **(Συμπέρασμα).** Καταρχάς είναι προφανές ότι τα τμήματα **ΑΜ** και **ΔΖ** τέμνονται σε ένα εσωτερικό σημείο του τριγώνου, έστω **Ρ** (γιατί;). **Αρκεί να αποδείξουμε** λοιπόν ότι από το **Ρ** διέρχεται και η τρίτη ευθεία ή ισοδύναμα ότι η **ΒΡ** είναι παράλληλη στην **ΕΖ.** Προς τούτο, αρκεί να αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο **ΕΒΡΖ** είναι παραλληλόγραμμο, αφού ΖΡ ∥ ΕΒ. Για να αποδείξουμε όμως ότι το τετράπλευρο **ΕΒΡΖ** είναι παραλληλόγραμμο αρκεί να αποδείξουμε ότι **ΖΡ = ΕΒ.** Παρατηρούμε δε πως τα τμήματα **ΖΡ** και **ΕΒ** είναι πλευρές των τριγώνων **ΑΖΡ** και **ΔΕΒ** αντίστοιχα, τα οποία υποψιαζόμαστε ότι είναι ίσα. **Αρκεί** λοιπόν να αποδείξουμε ότι τα τρίγωνα **ΑΖΡ** και **ΔΕΒ** είναι ίσα.

Σύνδεση των δεδομένων με τη θεωρία

Το τρίγωνο **ΑΒΓ** είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^o$**,** οπότε $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^o$**.** Η **ΑΜ** είναι διάμεσος του τριγώνου αυτού που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα **ΒΓ**. Αυτό σημαίνει ότι $AM = \frac{B\Gamma}{2}$ και ότι τα τρίγωνα **ΜΑΓ** και **ΜΑΒ** είναι ισοσκελή, οπότε ισχύουν σ' αυτά όλες οι ιδιότητες των ισοσκελών τριγώνων.
Τα τμήματα **ΔΕ** και **ΔΖ** είναι κάθετα στις πλευρές **ΑΒ** και **ΑΓ** αντίστοιχα, οπότε το τετράπλευρο **ΑΕΔΖ** είναι ορθογώνιο και επομένως ισχύουν σ' αυτό όλες οι ιδιότητες των ορθογωνίων.

Απόδειξη

Συγκρίνουμε τα **ορθογώνια** τρίγωνα **ΖΑΡ** και **ΕΔΒ.** Αυτά έχουν:

1. **ΑΖ = ΔΕ,** ως απέναντι πλευρές του ορθογωνίου **ΑΖΔΕ** και
2. $\hat{A}_1 = \hat{\Delta}_1$, διότι $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$, αφού το τρίγωνο **ΜΑΓ** είναι ισοσκελές και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}$ ως συμπληρωματικές της γωνίας Β του τριγώνου ΑΒΓ.

Από τις παραπάνω ισότητες προκύπτει ότι τα ορθογώνια τρίγωνα **ΖΑΡ** και **ΕΔΒ** είναι ίσα, οπότε **ΖΡ = ΕΒ.** Επειδή τα τμήματα αυτά είναι και παράλληλα, αφού το **ΑΖΔΕ** είναι ορθογώνιο, έπεται ότι το τετράπλευρο **ΕΒΡΖ** είναι παραλληλόγραμμο και επομένως ισχύει **ΒΡ || ΕΖ.** Συνεπώς η παράλληλη από το **Β** προς την **ΕΖ** διέρχεται από το **Ρ,** αφού από το σημείο **Β** μόνο μία παράλληλη μπορούμε να φέρουμε προς την **ΕΖ.**

Άρα η διάμεσος **ΑΜ** του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, το τμήμα **ΔΖ** και η παράλληλη από το **Β** προς την **ΕΖ** συντρέχουν.