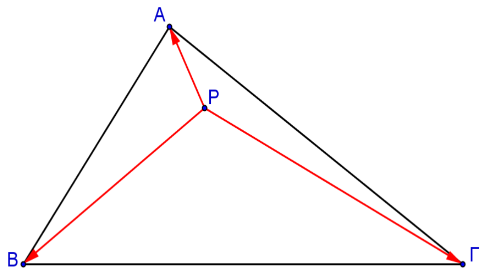
Μία απόδειξη ενός θεωρήματος του Καραθεοδωρή

Δρ. Παναγιώτης Λ. Θεοδωρόπουλος
Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03
e-mail@p-theodoropoulos.gr

Στο άρθρο αυτό παρουσιάζεται μία απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος του Καραθεοδωρή, το οποίο θεωρώ πως έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τους μαθητές της Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Β΄ Λυκείου.

<u>Θεώρημα:</u> Για κάθε εσωτερικό σημείο Ρ ενός τριγώνου ΑΒΓ ισχύει:

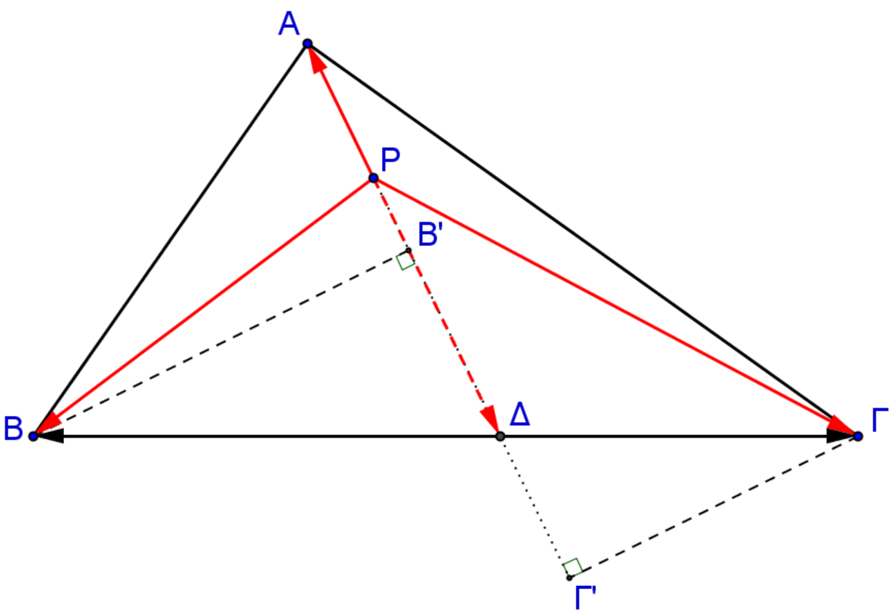
$$(\mathrm{B P \Gamma})\overrightarrow{\mathrm{PA}} + (\mathrm{A P \Gamma})\overrightarrow{\mathrm{PB}} + (\mathrm{A P B})\overrightarrow{\mathrm{P\Gamma}} = \vec{0}$$



<u>Απόδειξη</u>

Παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα ΑΡΒ και ΑΡΓ έχουν κοινή πλευρά την ΑΡ, οπότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των υψών τους προς την πλευρά αυτή (δείτε παράγραφο 10.5 του σχολικού βιβλίου της Γεωμετρίας).

Χαράσσοντας τα ύψη ΒΒ΄ και ΓΓ΄ των τριγώνων αυτών προκύπτει το παρακάτω σχήμα.



Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω έχουμε:

$$\frac{(\mathrm{APB})}{(\mathrm{AP\Gamma})} = \frac{\mathrm{BB'}}{\Gamma\Gamma'}. \qquad (1)$$

Όμως, όπως εύκολα αποδεικνύεται, τα τρίγωνα ΔΒΒ΄ και ΔΓΓ΄ είναι όμοια, οπότε η (1) γίνεται:

$$\frac{(\mathrm{APB})}{(\mathrm{AP\Gamma})} = \frac{\Delta\mathrm{B}}{\Delta\Gamma}. \qquad (2)$$

Επειδή η ισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε περιέχει διανύσματα, μεταφέρουμε την ισότητα (2) στα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta\mathrm{B}}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ που είναι αντίρροπα και έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}(\mathrm{AP\Gamma})\overrightarrow{\Delta\mathrm{B}} = -(\mathrm{APB})\overrightarrow{\Delta\Gamma} &\Leftrightarrow (\mathrm{AP\Gamma})\left(\overrightarrow{\mathrm{PB}} - \overrightarrow{\mathrm{P}\Delta}\right) = -(\mathrm{APB})\left(\overrightarrow{\mathrm{P}\Gamma} - \overrightarrow{\mathrm{P}\Delta}\right)\\ &\Leftrightarrow (\mathrm{AP\Gamma})\overrightarrow{\mathrm{PB}} + (\mathrm{APB})\overrightarrow{\mathrm{P}\Gamma} = ((\mathrm{AP\Gamma}) + (\mathrm{APB}))\overrightarrow{\mathrm{P}\Delta}.\end{aligned}$$

Προσθέτοντας και στα δύο μέλη της τελευταίας ισότητας το διάνυσμα $(\mathrm{BP\Gamma})\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ παίρνουμε:

$$(\mathrm{BP\Gamma})\overrightarrow{\mathrm{PA}} + (\mathrm{AP\Gamma})\overrightarrow{\mathrm{PB}} + (\mathrm{APB})\overrightarrow{\mathrm{P}\Gamma} = ((\mathrm{AP\Gamma}) + (\mathrm{APB}))\overrightarrow{\mathrm{P}\Delta} + (\mathrm{BP\Gamma})\overrightarrow{\mathrm{PA}}. \qquad (3)$$

Επειδή τώρα τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{P}\Delta}$ και $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ είναι συγγραμμικά και $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \neq \vec{0}$ αφού το Ρ είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου ΑΒΓ, υπάρχει[1] $k \in IR$ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{\mathrm{P}\Delta} = k\overrightarrow{\mathrm{PA}}$. Έτσι λοιπόν η παράσταση του δεύτερου μέλους της παραπάνω ισότητας γράφεται:

$$((\mathrm{AP\Gamma}) + (\mathrm{APB}))\overrightarrow{\mathrm{P}\Delta} + (\mathrm{BP\Gamma})\overrightarrow{\mathrm{PA}} = ((\mathrm{AP\Gamma}) + (\mathrm{APB}))k\overrightarrow{\mathrm{PA}} + (\mathrm{BP\Gamma})\overrightarrow{\mathrm{PA}} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{PA}},$$

όπου $\lambda = ((\mathrm{AP\Gamma}) + (\mathrm{APB}))k + (\mathrm{BP\Gamma}) \in IR$ και η ισότητα (3) παίρνει την μορφή:

$$(\mathrm{BP\Gamma})\overrightarrow{\mathrm{PA}} + (\mathrm{AP\Gamma})\overrightarrow{\mathrm{PB}} + (\mathrm{APB})\overrightarrow{\mathrm{P}\Gamma} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{PA}}. \qquad (4)$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι υπάρχει $\mu \in IR$ τέτοιο ώστε:

$$(\mathrm{BP\Gamma})\overrightarrow{\mathrm{PA}} + (\mathrm{AP\Gamma})\overrightarrow{\mathrm{PB}} + (\mathrm{APB})\overrightarrow{\mathrm{P}\Gamma} = \mu\overrightarrow{\mathrm{PB}}. \qquad (5)$$

Από τις σχέσεις (4) και (5) προκύπτει ότι:

$$\lambda\overrightarrow{\mathrm{PA}} = \mu\overrightarrow{\mathrm{PB}}.$$

[1] Σύμφωνα με το θεώρημα της σελίδας 24 του βιβλίου των Μαθηματικών Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Β΄ Λυκείου (Συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων).

Επειδή όμως τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ είναι μη συγγραμμικά, συμπεραίνουμε ότι[2]:

$$\lambda = \mu = 0.$$

Άρα ισχύει:

$$(\mathrm{B P \Gamma})\overrightarrow{\mathrm{PA}} + (\mathrm{A P \Gamma})\overrightarrow{\mathrm{PB}} + (\mathrm{APB})\overrightarrow{\mathrm{P\Gamma}} = \vec{0}.$$

<u>Παρατήρηση</u>: Αν το σημείο P είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, τότε τα τρίγωνα ΒΡΓ, ΑΡΓ και ΑΡΒ, έχουν το ίδιο εμβαδόν, οπότε, στην περίπτωση αυτή αν απλοποιηθεί η τελευταία ισότητα με την διαγραφή των εμβαδών αυτών των τριγώνων, τότε προκύπτει η πρώτη σχέση της εφαρμογής 1 της παραγράφου 1.3 του σχολικού βιβλίου των Μαθηματικών Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Β΄ Λυκείου. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το παραπάνω θεώρημα αποτελεί γενίκευση της σχέσης αυτής.

Επίσης, αποδεικνύεται εύκολα ότι το παραπάνω θεώρημα ισχύει και όταν το σημείο P είναι σημείο κάποιας πλευράς του τριγώνου ΑΒΓ, ενώ δεν ισχύει για τα εξωτερικά σημεία του τριγώνου ΑΒΓ.

<u>Σημείωση</u>: Για τις γενικεύσεις στα Μαθηματικά μπορείτε να δείτε σχετική εργασία μου στην διεύθυνση:

http://www.p-theodoropoulos.gr/ergasies/mathimat-afairgenik.pdf

[2] Δείτε στο βιβλίο των Μαθηματικών Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Β΄ Λυκείου στη σελίδα 31 την απόδειξη της μοναδικότητας των συντεταγμένων ενός διανύσματος.