Οι μέσοι αριθμοί, το κέντρο βάρους ενός σώματος και η μέση τιμή μιας συνάρτησης από την ίδια οπτική γωνία

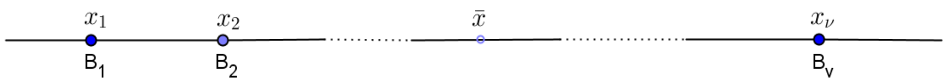
Δρ. Παναγιώτης Λ. Θεοδωρόπουλος
πρώην Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03
e-mail@p-theodoropoulos.gr

Πρόλογος

Στην εργασία αυτή αναδεικνύεται ο σταθμικός μέσος ως ο γενικός μέσος για τα διακριτά μεγέθη και τονίζεται η συσχέτισή του με την μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής στη Θεωρία Πιθανοτήτων αλλά και γενικότερα με την μέση τιμή μιας συνάρτησης (δείτε Θ.Μ.Τ. Διαφορικού και Ολοκληρωτικού Λογισμού). Επίσης, γίνεται και διασύνδεση όλων αυτών των εννοιών με την αντίστοιχη έννοια της Φυσικής που είναι το κέντρο βάρους ή κέντρο μάζας ενός σώματος.

Κέντρο βάρους ενός συστήματος ν σωμάτων

Ας ξεκινήσουμε, ως *εισαγωγή*, με την έννοια του κέντρου βάρους ενός συστήματος ν σωμάτων με ν > 1.
Υποθέτουμε ότι σε ένα τεντωμένο σύρμα αμελητέου βάρους (δείτε σχήμα 1) στα σημεία με τετμημένες $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ (για την βαθμολόγηση του σύρματος θεωρούμε ως αρχή ένα οποιοδήποτε σημείο του) είναι προσαρμοσμένα ν σώματα (ν > 1) με βάρη B_1, $\mathrm{B}_2, \ldots, \mathrm{B}_\nu$ ή με μάζες $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$ αντίστοιχα.



Σχήμα 1

Ζητάμε το κέντρο βάρους του παραπάνω συστήματος, δηλαδή εκείνο το σημείο του σύρματος στο οποίο αν στηριχθεί το σύστημα, τότε αυτό θα ισορροπεί. Έστω λοιπόν $\overline{x}$ η τετμημένη του σημείου αυτού. Σύμφωνα με τον νόμο των ροπών πρέπει το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των βαρών των ν σωμάτων ως προς το σημείο $\overline{x}$ να είναι ίσο με μηδέν, δηλαδή πρέπει να ισχύει η σχέση:

$$\mathrm{B}_1(x_1-\overline{x})+\mathrm{B}_2(x_2-\overline{x})+\cdots+\mathrm{B}_\nu(x_\nu-\overline{x})=0$$

ή ισοδύναμα η σχέση:

$$m_1(x_1-\overline{x})+m_2(x_2-\overline{x})+\cdots+m_\nu(x_\nu-\overline{x})=0\,,$$

από την οποία παίρνουμε:

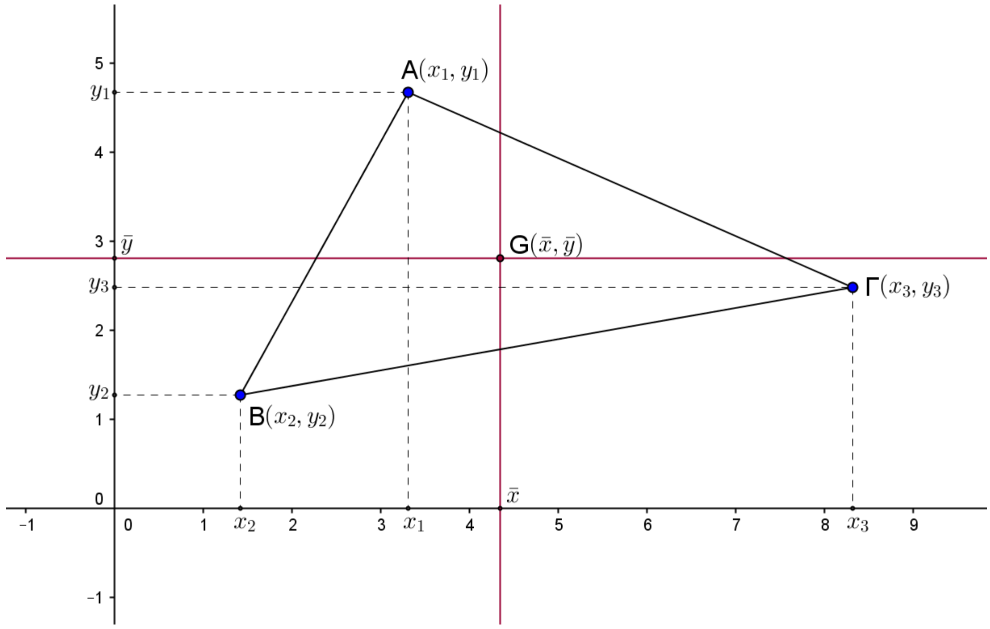
$$\overline{x}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_\nu x_\nu}{m_1+m_2+\cdots+m_\nu}. \qquad (1)$$

Αν όλα τα σώματα έχουν την ίδια μάζα, τότε το κέντρο βάρους ή κέντρο μάζας του συστήματος αυτού είναι το σημείο με τετμημένη:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_\nu}{\nu} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} x_i = \sum_{i=1}^{\nu}\frac{1}{\nu} x_i .$$

Όμοια, αν τοποθετήσουμε τρία σώματα με βάρη B_1, B_2 και B_3 ή με μάζες m_1, m_2 και m_3 αντίστοιχα στις κορυφές Α, Β και Γ ενός τριγώνου ΑΒΓ αμελητέου βάρους (δείτε σχήμα 2), τότε θεωρώντας στο επίπεδο του τριγώνου ΑΒΓ ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς δύο αξόνων βρίσκουμε ότι οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους $G(\overline{x},\ \overline{y})$ (σημείο ισορροπίας) του συστήματος αυτού είναι:

$$\overline{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} \qquad \& \qquad \overline{y} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} . \qquad (2)$$



Σχήμα 2

Για να ισορροπεί το παραπάνω σύστημα των τριων σωμάτων, πρέπει το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των βαρών των σωμάτων ως προς τους άξονες $x = \overline{x}$ και $y = \overline{y}$ να είναι ίσο με μηδέν, δηλαδή πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις:

$$B_1(x_1 - \overline{x}) + B_2(x_2 - \overline{x}) + B_3(x_3 - \overline{x}) = 0 \quad \text{και}$$

$$B_1(y_1 - \overline{y}) + B_2(y_2 - \overline{y}) + B_3(y_3 - \overline{y}) = 0 .$$

Από τις σχέσεις αυτές εξάγονται οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους του συστήματος που αναφέρονται παραπάνω (τύποι (2)).

Να σημειωθεί ότι το σύστημα αυτό των τριων σωμάτων ισορροπεί και αν στηριχτεί σε καθέναν από τους άξονες $x = \overline{x}$ και $y = \overline{y}$ (άξονες ισορροπίας). Η τομή των δύο αξόνων ισορροπίας είναι το κέντρο βάρους του συστήματος.

Αν τα τρία σώματα έχουν ίσα βάρη, τότε οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους $G(\overline{x},\ \overline{y})$ είναι:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \qquad \& \qquad \overline{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} .$$

Μπορούμε να παραβάλουμε τις συντεταγμένες του κέντρου βάρους του παραπάνω συστήματος των τριων σωμάτων στην περίπτωση που τα σώματα έχουν ίσα βάρη με τις συντεταγμένες του βαρύκεντρου ενός τριγώνου (δείτε [1], σελ. 36).

Επίσης, εκείνο που πρέπει να σημειωθεί ακόμη είναι ότι η παραπάνω διαδικασία μπορεί να γενικευθεί τοποθετώντας ν σώματα, όπου ν > 3, σε ισάριθμα σημεία. Εδώ όμως πρέπει να διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, δηλαδή αν τα ν σημεία είναι στο ίδιο επίπεδο ή όχι. Και στις δύο περιπτώσεις προκύπτουν με τον ίδιο τρόπο ανάλογοι τύποι. Για παράδειγμα, αν τα σώματα έχουν ίσα βάρη και τα σημεία δεν είναι στο ίδιο επίπεδο, τότε θεωρώντας ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς τριων αξόνων βρίσκουμε ότι οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους $G(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ του συστήματος είναι:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_\nu}{\nu}, \quad \overline{y} = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_\nu}{\nu} \quad \text{και} \quad \overline{z} = \frac{z_1 + z_2 + \cdots + z_\nu}{\nu}$$

ή σε διανυσματική μορφή $\vec{r}_{CM} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\vec{r}_i$, όπου $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$ τα διανύσματα θέσης των αντίστοιχων σημείων. Αν τα σώματα έχουν διαφορετικές μάζες m_i, $i = 1, 2, \ldots, \nu$, τότε το διάνυσμα θέσης του κέντρου βάρους είναι το διάνυσμα:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{m_{o\lambda}}\sum_{i=1}^{\nu} m_i\vec{r}_i, \quad \text{όπου } m_{o\lambda} = \sum_{i=1}^{\nu} m_i.$$

Μέση τιμή ν αριθμών

Ο αριθμός:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_\nu}{\nu} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} x_i = \sum_{i=1}^{\nu}\frac{1}{\nu}x_i,$$

που είδαμε παραπάνω, λέγεται **αριθμητικός μέσος** των ν (ν > 1) αριθμών $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ και όπως γνωρίζουμε είναι ένα πολύ καλό μέτρο θέσης για τα δεδομένα μιας ποσοτικής μεταβλητής στη Στατιστική.

Ο αριθμητικός μέσος των αριθμών $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ είναι ο μοναδικός πραγματικός αριθμός $\overline{x}$ για τον οποίο ισχύει η σχέση $\sum_{i=1}^{\nu}(x_i - \overline{x}) = 0$, δηλαδή το αλγεβρικό άθροισμα των διαφορών του από τους αριθμούς $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ είναι ίσο με μηδέν.

Αν οι αριθμοί $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ λαμβάνονται με διαφορετικό συντελεστή βαρύτητας ο καθένας, έστω $w_1, w_2, \ldots, w_\nu$ αντίστοιχα ($w_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$), τότε αναζητούμε τον αριθμό $\overline{x}$ (μέση τιμή), ώστε να ισχύει η ισότητα:

$$\sum_{i=1}^{\nu} w_i(x_i - \overline{x}) = 0,$$

από την οποία παίρνουμε:

$$\overline{x} = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_\nu x_\nu}{w_1 + w_2 + \cdots + w_\nu}. \qquad (3)$$

Ο παραπάνω αριθμός λέγεται **σταθμικός μέσος** (weighted mean) των αριθμών $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ που λαμβάνονται με συντελεστές βαρύτητας $w_1, w_2, \ldots, w_\nu$ αντίστοιχα (δείτε [2], σελ. 87). Ο αριθμητικός μέσος είναι η ειδική περίπτωση του σταθμικού μέσου όπου οι συντελεστές βαρύτητας των αριθμών είναι όλοι ίσοι με 1.

Μπορούμε να παραβάλουμε την έκφραση του σταθμικού μέσου (τύπος (3)) με τις παραστάσεις στους τύπους (1) και (2) των συντεταγμένων του κέντρου βάρους των σωμάτων στην περίπτωση που τα σώματα έχουν διαφορετικές μάζες.

Υπογραμμίζεται ότι ο σταθμικός μέσος ν αριθμών (ν > 1) είναι η γενική περίπτωση μέσου για τα διακριτά μεγέθη, αφού και οι άλλοι δύο γνωστοί μέσοι αριθμοί ν θετικών αριθμών, ο **γεωμετρικός** και ο **αρμονικός**, όπως αποδεικνύεται στην εργασία[1] [7] αλλά και στα παρακάτω θεωρήματα είναι ειδικές περιπτώσεις σταθμικού μέσου. Δηλαδή για την εξαγωγή του γεωμετρικού και του αρμονικού μέσου ν (ν > 1) θετικών αριθμών $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_\nu$ κάθε αριθμός συμμετέχει με ειδικό συντελεστή βαρύτητας.

<u>Θεώρημα 1</u>: Για οποιουσδήποτε *ν*, όπου ν ≥ 2, θετικούς πραγματικούς αριθμούς $x_1, x_2, ..., x_\nu$ υπάρχουν θετικοί αριθμοί $w_1, w_2, ..., w_\nu$ τέτοιοι, ώστε ο γεωμετρικός μέσος των αριθμών αυτών να εκφράζεται ως εξής:

$$G = \sqrt[\nu]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_\nu} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \ldots + w_\nu x_\nu}{w_1 + w_2 + \ldots + w_\nu}.$$

<u>**Απόδειξη**</u>

Αν θέσουμε:

$$w_1 = \sqrt[\nu]{x_2^{\nu-1} \cdot x_3^{\nu-2} \cdot \ldots \cdot x_\nu}, \qquad w_2 = \sqrt[\nu]{x_3^{\nu-1} \cdot x_4^{\nu-2} \cdot \ldots \cdot x_\nu^2 \cdot x_1}, \ \ldots,$$

$$w_{\nu-1} = \sqrt[\nu]{x_\nu^{\nu-1} \cdot x_1^{\nu-2} \cdot \ldots \cdot x_{\nu-2}} \qquad \text{και} \qquad w_\nu = \sqrt[\nu]{x_1^{\nu-1} \cdot x_2^{\nu-2} \cdot \ldots \cdot x_{\nu-1}}$$

τότε εύκολα αποδεικνύεται (πολλαπλασιάζουμε χιαστί κλπ.) ότι ισχύει:

$$\frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \ldots + w_\nu x_\nu}{w_1 + w_2 + \ldots + w_\nu} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt[\nu]{x_2^{\nu-1} \cdot x_3^{\nu-2} \cdot \ldots \cdot x_\nu}\right) x_1 + \left(\sqrt[\nu]{x_3^{\nu-1} \cdot x_4^{\nu-2} \cdot \ldots \cdot x_\nu^2 \cdot x_1}\right) x_2 + \ldots + \left(\sqrt[\nu]{x_1^{\nu-1} \cdot x_2^{\nu-2} \cdot \ldots \cdot x_{\nu-1}}\right) x_\nu}{\left(\sqrt[\nu]{x_2^{\nu-1} \cdot x_3^{\nu-2} \cdot \ldots \cdot x_\nu}\right) + \left(\sqrt[\nu]{x_3^{\nu-1} \cdot x_4^{\nu-2} \cdot \ldots \cdot x_\nu^2 \cdot x_1}\right) + \ldots + \left(\sqrt[\nu]{x_1^{\nu-1} \cdot x_2^{\nu-2} \cdot \ldots \cdot x_{\nu-1}}\right)} =$$

$$= \sqrt[\nu]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_\nu} \qquad \text{(γεωμετρικός μέσος).}$$

<u>Σχόλιο</u>: Στην απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος παρατηρούμε ότι για τον προσδιορισμό των συντελεστών βαρύτητας $w_1, w_2, ..., w_\nu$ των θετικών αριθμών $x_1, x_2, ..., x_\nu$ αντίστοιχα για την εξαγωγή του γεωμετρικού τους μέσου, όπου ο συντελεστής βαρύτητας κάθε αριθμού εκφράζεται ως συνάρτηση των υπόλοιπων αριθμών,

[1] Στην εν λόγω ερευνητική εργασία, η οποία είχε ως αρχικό σκοπό την από κοινού γενίκευση της αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου, προέκυψε ότι ο γεωμετρικός και αρμονικός μέσος είναι ειδικές περιπτώσεις σταθμικού μέσου. Έτσι λοιπόν διατύπωσα και απόδειξα το σχετικό θεώρημα που περιέχεται στην εργασία αυτή. Προσωπικά δεν γνωρίζω αν υπάρχει άλλη δημοσιευμένη σχετική απόδειξη. Αν κάποιος συνάδελφος γνωρίζει κάτι τέτοιο τον παρακαλώ πολύ να με ενημερώσει και θα του είμαι ευγνώμων γι’ αυτό.

χρησιμοποιείται κυκλικά η διάταξη των αριθμών αυτών (κυκλική μετάθεση). Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι υπάρχουν τόσες τέτοιες ν-άδες συντελεστών βαρύτητας, όσες είναι οι κυκλικές μεταθέσεις των ν αυτών αριθμών, δηλαδή (ν-1)!

Ας δούμε και ένα σχετικό παράδειγμα.

Παράδειγμα 1: Ο γεωμετρικός μέσος των αριθμών **8**, **27** και **64** είναι ο αριθμός:

$$\sqrt[3]{8 \cdot 27 \cdot 64} = \sqrt[3]{13824} = 24.$$

Επειδή με τους παραπάνω τρεις αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε (3 - 1)! = 2 κυκλικές μεταθέσεις, συμπεραίνουμε ότι για την έκφραση του γεωμετρικού τους μέσου ως σταθμικού υπάρχουν δύο τριάδες συντελεστών βαρύτητας, όπου ο συντελεστής βαρύτητας κάθε αριθμού εκφράζεται ως συνάρτηση των άλλων δύο. Επαληθεύοντας αυτόν τον ισχυρισμό έχουμε:

- Αν θεωρήσουμε την κυκλική μετάθεση C(8, 27, 64), τότε σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα οι συντελεστές βαρύτητας των αριθμών 8, 27 και 64 κατ' αντιστοιχία είναι οι αριθμοί:

  $$w_1 = \sqrt[3]{27^2 \cdot 64} = 36, \quad w_2 = \sqrt[3]{64^2 \cdot 8} = 32 \quad \text{και} \quad w_3 = \sqrt[3]{8^2 \cdot 27} = 12$$

  και έχουμε:

  $$\frac{36 \cdot \mathbf{8} + 32 \cdot \mathbf{27} + 12 \cdot \mathbf{64}}{36 + 32 + 12} = \frac{288 + 864 + 768}{80} = \frac{1920}{80} = 24.$$

- Αν θεωρήσουμε την κυκλική μετάθεση C(8, 64, 27), τότε οι συντελεστές βαρύτητας των αριθμών 8, 27 και 64 είναι οι αριθμοί:

  $$w_1 = \sqrt[3]{64^2 \cdot 27} = 48, \quad w_2 = \sqrt[3]{8^2 \cdot 64} = 16 \quad \text{και} \quad w_3 = \sqrt[3]{27^2 \cdot 8} = 18$$

  αντίστοιχα και για την επαλήθευση έχουμε:

  $$\frac{48 \cdot \mathbf{8} + 16 \cdot \mathbf{27} + 18 \cdot \mathbf{64}}{48 + 16 + 18} = \frac{384 + 432 + 1152}{82} = \frac{1968}{82} = 24.$$

Θεώρημα 2: Για οποιουσδήποτε *ν*, όπου ν ≥ 2, θετικούς πραγματικούς αριθμούς $x_1, x_2, ..., x_\nu$ υπάρχουν θετικοί αριθμοί $w_1, w_2, ..., w_\nu$ τέτοιοι, ώστε ο αρμονικός μέσος των αριθμών αυτών να εκφράζεται ως εξής:

$$H = \frac{\nu}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_\nu}} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + ... + w_\nu x_\nu}{w_1 + w_2 + ... + w_\nu}.$$

Απόδειξη

Αν θέσουμε:

$$w_1 = x_2 x_3 \cdot ... \cdot x_\nu, \qquad w_2 = x_1 x_3 \cdot ... \cdot x_\nu,$$

$$... ... ...,$$

$$w_{\nu-1} = x_1 x_2 \cdot ... \cdot x_{\nu-2} x_\nu \qquad \& \qquad w_\nu = x_1 x_2 \cdot ... \cdot x_{\nu-1}$$

τότε αποδεικνύεται εύκολα (διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με $x_1 x_2 x_3 \cdot ... \cdot x_\nu$) ότι ισχύει:

$$\frac{w_1x_1 + w_2x_2 + \ldots + w_\nu x_\nu}{w_1 + w_2 + \ldots + w_\nu} =$$

$$= \frac{(x_2x_3 \cdot \ldots \cdot x_\nu)\cdot x_1 \;+\; (x_1x_3 \cdot \ldots \cdot x_\nu)\cdot x_2 \;+\; \ldots \;+\; (x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_{\nu-1})\cdot x_\nu}{(x_2x_3 \cdot \ldots \cdot x_\nu) \;+\; (x_1x_3 \cdot \ldots \cdot x_\nu) \;+\; \ldots \;+\; (x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_{\nu-1})} =$$

$$= \frac{\nu}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_\nu}} \quad \text{(αρμονικός μέσος).}$$

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση του αρμονικού μέσου, σε αντίθεση με τον γεωμετρικό, ο συντελεστής βαρύτητας κάθε αριθμού που εκφράζεται ως συνάρτηση των υπόλοιπων αριθμών είναι μοναδικός.

Πρέπει να σημειωθεί ότι σε προβλήματα με ταχύτητες και γενικά με ρυθμούς μεταβολής, όπως φαίνεται και στην παρακάτω εφαρμογή, κατάλληλος για την έκφραση της μέσης τιμής των μεγεθών αυτών είναι ο αρμονικός μέσος.

Εφαρμογή 1: Ένας μαθητής σε μία ώρα λύνει 2 ασκήσεις, αν είναι δύσκολες ή 10, αν είναι εύκολες. Με την προϋπόθεση ότι ως προς τον βαθμό δυσκολίας οι ασκήσεις είναι κατανεμημένες ομοιόμορφα, να βρείτε πόσες ασκήσεις κατά μέσο όρο λύνει σε μία ώρα αυτός ο μαθητής.

Λύση

Εύκολα θα έλεγε κάποιος ότι κατά μέσο όρο ο μαθητής αυτός λύνει 6 ασκήσεις την ώρα, δηλαδή θα χρησιμοποιούσε τον αριθμητικό μέσο. Θα αποδείξουμε όμως ότι αυτό δεν είναι σωστό και πως ο αρμονικός μέσος είναι αυτός που εκφράζει τον ζητούμενο μέσο όρο.

Ο αρμονικός μέσος των αριθμών **2** και **10** υπολογιζόμενος ως σταθμικός μέσος σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα είναι ο εξής:

$$\frac{10\cdot\mathbf{2} + 2\cdot\mathbf{10}}{10+2} = \frac{20+20}{12} = \frac{40}{12} = \frac{10}{3}.$$

Άρα ο μαθητής αυτός κατά μέσο όρο λύνει 10/3 ασκήσεις την ώρα.

Αυτό εξηγείται ως εξής:
Ο μαθητής αυτός για μία δύσκολη άσκηση χρειάζεται χρόνο το 1/2 της ώρας και για μία εύκολη το 1/10 της ώρας. Για να λύσει μία δύσκολη και μία εύκολη άσκηση χρειάζεται χρόνο τα 6/10 της ώρας, άρα για μία άσκηση κατά μέσο όρο θέλει χρόνο τα 3/10 της ώρας. Έτσι λοιπόν σε μία ώρα λύνει κατά μέσο όρο 10/3 ασκήσεις.

Το παραπάνω αποτέλεσμα επαληθεύεται ως εξής:
Ας υποθέσουμε ότι ο μαθητής αυτός έχει να λύσει 40 ασκήσεις, 20 δύσκολες και 20 εύκολες (ομοιόμορφα κατανεμημένες). Αν θεωρούσαμε ως μέσο αριθμό τον αριθμητικό μέσο, τότε ο αναμενόμενος χρόνος που θα χρειαζόταν για τη λύση αυτών των ασκήσεων είναι 40 : 6 ≈ 6,6 ώρες, ενώ με τον αρμονικό μέσο είναι 40 : (10/3) = 12 ώρες. Ο πραγματικός χρόνος είναι 20 : 2 = 10 ώρες για τις δύσκολες ασκήσεις και 20 : 10 = 2 ώρες για τις εύκολες, συνολικά 12 ώρες, όσος είναι δηλαδή και ο αναμενόμενος χρόνος που προκύπτει με τον αρμονικό μέσο.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε ν αριθμούς (ν > 1) $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, οι οποίοι λαμβάνονται με συντελεστές βαρύτητας $w_1, w_2, \ldots, w_\nu$ αντίστοιχα ($w_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$). Αν θέσουμε $w_{o\lambda} = \sum_{i=1}^{\nu} w_i$, τότε ο σταθμικός μέσος,

$$\overline{x} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_\nu x_\nu}{w_1 + w_2 + \cdots + w_\nu}$$

των αριθμών αυτών ως προς τους συντελεστές βαρύτητας $w_1, w_2, \ldots, w_\nu$, μπορεί να γραφτεί και ως εξής:

$$\overline{x} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_\nu x_\nu}{w_1 + w_2 + \cdots + w_\nu} = x_1 \frac{w_1}{w_{o\lambda}} + x_2 \frac{w_2}{w_{o\lambda}} + \cdots + x_\nu \frac{w_\nu}{w_{o\lambda}}$$

$$= x_1 \lambda_1 + x_2 \lambda_2 + \cdots + x_\nu \lambda_\nu$$

όπου $\lambda_i = \dfrac{w_i}{w_{o\lambda}}$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$.

Τους συντελεστές λ_i, $i = 1, 2, \ldots, \nu$ θα τους καλούμε **συντελεστές σχετικής βαρύτητας** (σύντομα σ.σ.β.), διότι εκφράζουν την βαρύτητα κάθε αριθμού σε σχέση με τις βαρύτητες όλων των αριθμών. Είναι προφανές ότι ισχύει $\sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i = 1$.

Στο εξής για την απόδοση ενός σταθμικού μέσου ν αριθμών x_i, $i = 1, 2, \ldots, \nu$ (ν > 1) με οποιουσδήποτε συντελεστές σχετικής βαρύτητας θα χρησιμοποιούμε τον γενικό όρο **μέση τιμή.** Έτσι λοιπόν οδηγούμαστε στον επόμενο γενικό ορισμό.

<u>**Ορισμός 1**</u>**: Μέση τιμή ν ($\nu > 1$) πραγματικών αριθμών $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, όπου λαμβάνονται με συντελεστές σχετικής βαρύτητας $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ αντίστοιχα, με $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$ και $\sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i = 1$, ορίζεται ο πραγματικός αριθμός:**

$$\overline{x} = x_1 \lambda_1 + x_2 \lambda_2 + \ldots + x_\nu \lambda_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} x_i \lambda_i .$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι ισχύει η παρακάτω πρόταση.

<u>**Πρόταση 1**</u>**: Αν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ είναι ν ($\nu > 1$) πραγματικοί αριθμοί και $\overline{x}$ η μέση τιμή των αριθμών αυτών ως προς οποιουσδήποτε συντελεστές σχετικής βαρύτητας, τότε ισχύει:**

$$\min(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) \le \overline{x} \le \max(x_1, x_2, \ldots, x_\nu).$$

Μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής

Με ανάλογο τρόπο ορίζεται και η μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής στη Θεωρία Πιθανοτήτων.

Τυχαία μεταβλητή (σύντομα τ.μ.) ή **στοχαστική μεταβλητή** ονομάζεται κάθε μετρήσιμη[2] συνάρτηση με πραγματικές τιμές και πεδίο ορισμού τον δειγματικό χώρο Ω ενός πειράματος τύχης (δείτε [4], σελ. 16).

---

[2] Η μετρησιμότητα μιας τ..μ. X εξασφαλίζει την δυνατότητα απονομής πιθανότητας σε κάθε αριθμήσιμη ένωση ή τομή οποιωνδήποτε διαστημάτων (ανοικτών, κλειστών κλπ.) τιμών της X.

Αν μια τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \rightarrow IR$ παίρνει πεπερασμένο ή το πολύ αριθμήσιμο πλήθος τιμών, τότε ονομάζεται **διακριτή**. Αν όμως μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος ή μιας ένωσης ξένων διαστημάτων, τότε ονομάζεται **συνεχής**.

Η **μέση τιμή** μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής X, η οποία παίρνει τις τιμές x_i, $i = 1, 2, \ldots$ με αντίστοιχες πιθανότητες p_i, $i = 1, 2, \ldots$. ορίζεται (δείτε [4], σελ. 63) ως εξής:

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

με την προϋπόθεση ότι η σειρά συγκλίνει απολύτως, δηλαδή ότι ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{\infty} | x_i | p_i \in IR .$$

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση μιας διακριτής τ.μ. X οι συντελεστές σχετικής βαρύτητας των τιμών x_i, $i = 1, 2, \ldots$ της X είναι οι πιθανότητές τους. Υπενθυμίζεται ότι

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1 .$$

Αν οι τιμές μιας τ.μ. X είναι πεπερασμένου πλήθους, έστω $\nu > 1$, τότε η μέση τιμή της X είναι η εξής:

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{\nu} x_i p_i . \quad (3)$$

Στην περίπτωση αυτή όταν οι τιμές της X έχουν όλες την ίδια πιθανότητα, ίση με $\frac{1}{\nu}$, δηλαδή η τ.μ. X ακολουθεί την **διακριτή ομοιόμορφη** κατανομή, τότε η μέση τιμή, $\mathrm{E}(X)$, της X είναι ο αριθμητικός μέσος των τιμών της.

Μπορούμε να παραβάλουμε τον παραπάνω τύπο (3) της μέσης τιμής μιας τ.μ. X με πεπερασμένο πλήθος τιμών με τον τύπο:

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{\kappa} x_i f_i$$

της μέσης τιμής των δεδομένων μιας διακριτής ποσοτικής μεταβλητής στη Στατιστική, όπου f_i, $i = 1, \ldots, \kappa$ οι σχετικές συχνότητες των τιμών x_i, $i = 1, \ldots, \kappa$ αντίστοιχα της μεταβλητής αυτής (δείτε [2], σελίδα 85).

Αν μια τυχαία μεταβλητή X είναι συνεχής και f είναι η **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** της X, δηλαδή ισχύει $\mathrm{P}(x < X < x + \mathrm{d}x) = f(x)\mathrm{d}x$, $x \in IR$ (δείτε [4], σελ.39), τότε η **μέση τιμή** της X ορίζεται (δείτε [4], σελ. 63) ως εξής:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \qquad \text{(γενικευμένο ολοκλήρωμα, δείτε [6]).}$$

με την προϋπόθεση ότι:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} | x | f(x) dx \in IR .$$

Και εδώ υπενθυμίζεται ότι ισχύει $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$.

Μπορούμε να παραβάλουμε τη σχέση $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ με τη σχέση $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ καθώς και τον ορισμό $\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ της μέσης τιμής μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής με τον ορισμό $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ της μέσης τιμής μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής.

Έστω τώρα μία συνάρτηση $Y = g(X)$ μιας τυχαίας μεταβλητής X. Είναι προφανές ότι και η Y είναι τυχαία μεταβλητή. Η **μέση τιμή**, Ε(Y), της Y ορίζεται (δείτε [4], σελ. 70) ως εξής:

- αν η X είναι διακριτή με τιμές x_i, $i = 1, 2, \ldots$ και με αντίστοιχες πιθανότητες p_i, $i = 1, 2, \ldots$, τότε:

$$\mathrm{E}(Y) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i$$

  με την προϋπόθεση ότι $\sum_{i=1}^{\infty} |\, g(x_i) \,|\, p_i \in IR$,

- αν η X είναι συνεχής και f είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X, τότε:

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

  με την προϋπόθεση ότι ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\, g(x) \,|\, f(x)dx \in IR.$$

Στη Θεωρία Πιθανοτήτων η μέση τιμή μιας τ.μ. X λέγεται και **αναμενόμενη τιμή** ή **μαθηματική ελπίδα** της X.

Θεωρώ πως αξίζει να δούμε στο σημείο αυτό μία ενδιαφέρουσα εφαρμογή της μέσης τιμής μιας τυχαίας μεταβλητής.

Εφαρμογή 2: Σε μια ευρωπαϊκή αθλητική διοργάνωση συμμετέχουν 16 ομάδες μεταξύ των οποίων δύο ελληνικές. Πρόκειται να γίνει κλήρωση για να δημιουργηθούν τα ζευγάρια που θα παίξουν μεταξύ τους για την πρόκριση στην επόμενη φάση της διοργάνωσης (αγώνες "νοκ άουτ"). Αν όλες οι ομάδες έχουν την ίδια πιθανότητα πρόκρισης, ίση με 1/2, τι είναι καλύτερο για την Ελλάδα, να κληρωθούν οι ελληνικές ομάδες να παίξουν μεταξύ τους ή καθεμία να κληρωθεί να παίξει με ξένη ομάδα; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

Λύση

Είναι προφανές ότι στην επόμενη φάση της διοργάνωσης υπάρχει περίπτωση να προκριθούν ή δυο (2) ελληνικές ομάδες ή μία (1) ή καμία (0). Θεωρούμε λοιπόν την τυχαία μεταβλητή X, η οποία παίρνει αυτές τις τιμές και με αυτήν την έννοια. Η μέση τιμή ή μαθηματική ελπίδα της X εκφράζει τον αριθμό των ελληνικών ομάδων που αναμένεται να προκριθούν στην επόμενη φάση. Γι' αυτό θα υπολογίσουμε τη μέση τιμή της X και για τις δύο περιπτώσεις, ώστε να μπορέσουμε να τις συγκρίνουμε.
Στην πρώτη περίπτωση (οι ελληνικές ομάδες παίζουν μεταξύ τους) έχουμε:

$$E(X) = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 1$$

και στη δεύτερη περίπτωση (οι ελληνικές ομάδες παίζουν με ξένες ομάδες) έχουμε:

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1 .$$

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός των ελληνικών ομάδων που αναμένεται να προκριθούν στην επόμενη φάση της διοργάνωσης είναι ο ίδιος και στις δύο περιπτώσεις. Συνεπώς δεν έχει καμία σημασία το πώς θα κληρωθούν να παίξουν οι ελληνικές ομάδες.

Κέντρο βάρους ή κέντρο μάζας ενός σώματος

Με ανάλογο τρόπο ορίζεται και το διάνυσμα θέσης σε ένα σύστημα αναφοράς του κέντρου βάρους ή κέντρου μάζας ενός σώματος Σ με συνεχή κατανομή μάζας, το οποίο ορίζεται ως εξής:

$$\vec{r}_{CM} = \int_D \vec{r} \frac{1}{M} dm = \int_D \vec{r} \frac{1}{M} \rho(\vec{r}) dV ,$$

όπου $\rho(\vec{r})$ η πυκνότητα μάζας του σώματος Σ στο σημείο με διάνυσμα θέσης $\vec{r}$, dV ο απειροστός όγκος και $dm = \rho(\vec{r})dV$ η απειροστή μάζα.

Με το σύμβολο $\int_D$ παριστάνεται η ολοκλήρωση στο χώρο D που καταλαμβάνει το σώμα Σ και με M η συνολική μάζα του Σ (δείτε [8]).

Σημειώνεται ότι και εδώ ισχύει η σχέση $\int_D \frac{1}{M} dm = 1$.

Μέση τιμή μιας συνάρτησης

Ο ορισμός της μέσης τιμής μιας συνάρτησης $Y = g(X)$ μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X, που είδαμε παραπάνω, μπορεί να επεκταθεί για κάθε συνάρτηση που ορίζεται σε ένα διάστημα Δ. Η βαρύτητα για τις τιμές του Δ προσδιορίζεται με την βοήθεια μιας συνεχούς συνάρτησης σ ορισμένης στο Δ, την οποία θα καλούμε **συνάρτηση πυκνότητας σχετικής βαρύτητας** (σύντομα σ.π.σ.β.) και η οποία λειτουργεί για τις τιμές του Δ όπως λειτουργεί η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για τις τιμές της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X. Δηλαδή η βαρύτητα ενός στοιχειώδους υποδιαστήματος $(x, x + \mathrm{d}x)$ του Δ είναι ίση με $\sigma(x)\mathrm{d}x$. Κάθε συνάρτηση πυκνότητας σχετικής βαρύτητας σ των τιμών ενός διαστήματος Δ έχει τις ιδιότητες:

1. $\sigma(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \Delta$ και

2. $\int_\Delta \sigma(x)dx = 1$.

Με το σύμβολο $\int_\Delta$ παριστάνεται η ολοκλήρωση της σ στο διάστημα Δ, το οποίο μπορεί να είναι κλειστό, ανοικτό, μη φραγμένο κλπ. Στην περίπτωση που δεν είναι κλειστό έχουμε γενικευμένο ολοκλήρωμα (δείτε [6]). Για την περίπτωση κλειστού διαστήματος $[\alpha, \beta]$ έχουμε τον επόμενο γενικό ορισμό.

Ορισμός 2: Έστω g μία συνάρτηση η οποία ορίζεται σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και είναι ολοκληρώσιμη σ' αυτό και σ μία συνάρτηση πυκνότητας σχετικής βαρύτητας των τιμών του $[\alpha, \beta]$. Η μέση τιμή της g ως προς την σ ορίζεται ως εξής:

$$\overline{g} = \int_\alpha^\beta g(x)\sigma(x)dx .$$

Η παραπάνω έννοια ορίζεται καλά, αφού η βαρύτητα των τιμών του [*α, β*] μεταφέρεται και στις τιμές της συνάρτησης *g*.

Επίσης, πρέπει να σημειωθεί ακόμη ότι ο παραπάνω ορισμός της έννοιας της μέσης τιμής μιας συνάρτησης *g* γενικεύεται για κάθε διάστημα Δ με την προϋπόθεση ότι ορίζεται στο Δ το αντίστοιχο ολοκλήρωμα και είναι πραγματικός αριθμός.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι ισχύει η παρακάτω πρόταση:

<u>Πρόταση 2</u>: Αν η συνάρτηση *g* είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και υπάρχει η μέση τιμή $\overline{g}$ της *g* στο Δ ως προς κάποια συνάρτηση πυκνότητας σχετικής βαρύτητας *σ* των τιμών του Δ, τότε $\overline{g} \in g(\Delta)$.

<u>Εφαρμογή 3</u>: Να εξετάσετε αν υπάρχει μέση τιμή της συνάρτησης $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ **στο διάστημα (0, 2], αν για τις τιμές του (0, 2] η συνάρτηση πυκνότητας σχετικής βαρύτητας είναι η** $\sigma(x) = \dfrac{x}{2}$ **(γραμμική κατανομή).**

<u>Λύση</u>

Καταρχάς επαληθεύουμε ότι η συνάρτηση *σ* είναι μία συνάρτηση πυκνότητας σχετικής βαρύτητας των στοιχείων του (0, 2]. Πράγματι, η *σ* έχει τις ιδιότητες:

1. $\sigma(x) = \dfrac{x}{2} \geq 0$, για κάθε $x \in (0, 2]$ και
2. $\int_0^2 \dfrac{x}{2}dx = \lim\limits_{\lambda \to 0^+} \int_\lambda^2 \dfrac{x}{2}dx = \dfrac{1}{4} \lim\limits_{\lambda \to 0^+} \left[4 - \lambda^2\right] = 1$.

Τώρα θα εξετάσουμε αν υπάρχει μέση τιμή της *g* στο (0, 2] με σ.π.σ.β. για τις τιμές του (0, 2] την *σ*. Έχουμε λοιπόν:

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x}{2}dx = \int_0^2 \frac{1}{2x}dx = \lim_{\lambda \to 0^+} \int_\lambda^2 \frac{1}{2x}dx = \frac{1}{2} \lim_{\lambda \to 0^+} \left[\ln 2 - \ln \lambda\right] = +\infty .$$

Άρα δεν υπάρχει μέση τιμή της *g* στο (0, 2] με σ.π.σ.β. για τις τιμές του (0, 2] την *σ*.

Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού

Το **Θεώρημα Μέσης Τιμής** του **Διαφορικού Λογισμού** μας δίνει την μέση τιμή της παραγώγου f' σε ένα διάστημα (*α*, *β*) μιας συνάρτησης *f* , η οποία είναι συνεχής στο [*α*, *β*] και παραγωγίσιμη στο (*α*, *β*), όταν η συνάρτηση πυκνότητας σχετικής βαρύτητας των τιμών του (*α*, *β*) είναι μία σταθερή συνάρτηση $\sigma(x) = c > 0$ της οποίας η τιμή υπολογίζεται ως εξής:

$$\int_\alpha^\beta \sigma(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\alpha+\varepsilon}^{\beta-\varepsilon} cdx = 1 \Leftrightarrow c \lim_{\varepsilon \to 0^+}((\beta - \varepsilon) - (\alpha + \varepsilon)) = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{\beta - \alpha}.$$

Δηλαδή η σ.π.σ.β. των τιμών του (α, β) είναι η συνάρτηση $\sigma(x) = \dfrac{1}{\beta - \alpha}$, $x \in (\alpha, \beta)$ (δείτε [4], σελ. 43, "**ομοιόμορφη** συνεχής κατανομή σε διάστημα (*α*, *β*)").

Έστω λοιπόν μία συνάρτηση f για την οποία ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. του Διαφορικού Λογισμού για ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Θα υπολογίσουμε τη μέση τιμή της $f\,'$ στο (α, β) σύμφωνα με τα παραπάνω, αν για κάθε γ, δ με $\alpha < \gamma < \delta < \beta$ η $f\,'$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο διάστημα $[\gamma, \delta]$.

Έχουμε:

$$\overline{f}\,' = \int_\alpha^\beta f\,'(x)\sigma(x)dx = \int_\alpha^\beta f\,'(x)\frac{1}{\beta-\alpha}dx \quad \text{(γενικευμένο ολοκλήρωμα)}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\alpha+\varepsilon}^{\beta-\varepsilon} f\,'(x)\frac{1}{\beta-\alpha}dx$$

$$= \frac{1}{\beta-\alpha}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[f(\beta-\varepsilon)-f(\alpha+\varepsilon)\right]$$

$$= \frac{f(\beta)-f(a)}{\beta-\alpha} \quad \text{(αφού η } f \text{ είναι συνεχής στο } [\alpha, \beta]\text{)}.$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_\alpha^\beta f\,'(x)\frac{1}{\beta-\alpha}dx$$

ορίζεται και είναι πραγματικός αριθμός για κάθε συνάρτηση f για την οποία ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. του Διαφορικού Λογισμού σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Πράγματι έχουμε:

Έστω μία διαμέριση του διαστήματος (α, β) σε ν $(\nu > 1)$ διαστήματα πλάτους $\Delta x = \dfrac{\beta - a}{\nu}$ και ν αριθμοί ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, \nu$, ένας από κάθε διάστημα της διαμέρισης (η επιλογή γίνεται τυχαία). Ο αριθμητικός μέσος των τιμών $f\,'(\xi_i)$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$ της $f\,'$ είναι ο αριθμός:

$$\frac{f\,'(\xi_1)+f\,'(\xi_2)+\cdots+f\,'(\xi_\nu)}{\nu}.$$

Πολλαπλασιάζοντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή του παραπάνω κλάσματος με $\Delta x = \dfrac{\beta - a}{\nu}$, παίρνουμε:

$$\frac{f\,'(\xi_1)+f\,'(\xi_2)+\cdots+f\,'(\xi_\nu)}{\nu} = \frac{\left(f\,'(\xi_1)+f\,'(\xi_2)+\cdots+f\,'(\xi_\nu)\right)\cdot\Delta x}{\nu\cdot\Delta x} \quad \text{ή}$$

$$\frac{f\,'(\xi_1)+f\,'(\xi_2)+\cdots+f\,'(\xi_\nu)}{\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} f\,'(\xi_i)\Delta x}{\beta-\alpha}. \qquad (4)$$

Επειδή ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. του Διαφορικού Λογισμού για την f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ υπάρχει η μέση τιμή των τιμών της $f\,'$ στο (α, β), οπότε υπάρχει στο *IR* το όριο:

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{f'(\xi_1)+f'(\xi_2)+\cdots+f'(\xi_\nu)}{\nu}$$

και ισούται με την μέση τιμή της f' στο διάστημα (α, β). Συνεπώς λόγω της (4) υπάρχει στο IR και το όριο $\lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{\nu} f'(\xi_i)\Delta x\right)$. Δηλαδή ορίζεται το γενικευμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_\alpha^\beta f'(x)\frac{1}{\beta-\alpha}dx$$

και είναι πραγματικός αριθμός.

Αν η f' είναι συνεχής στο (α, β), τότε σύμφωνα με την πρόταση 2 υπάρχει αριθμός $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε:

$$f'(\xi)=\overline{f}'=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$

Παρατήρηση: Στην πρόταση 2 η συνθήκη της συνέχειας της g στο διάστημα Δ, ώστε να ισχύει $\overline{g}\in g(\Delta)$ είναι μόνο ικανή και όχι αναγκαία. Αυτό το βλέπουμε στην εφαρμογή του Θ.Μ.Τ. του Διαφορικού Λογισμού αφού η f' δεν είναι πάντα συνεχής, όπως φαίνεται και στο παρακάτω παράδειγμα, ενώ όταν ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. του Διαφορικού Λογισμού για μία συνάρτηση f σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$, υπάρχει πάντα αριθμός $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f'(\xi)=\overline{f}'$.

Παράδειγμα 2: Έστω η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}|x|^{\frac{3}{2}}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases} = \begin{cases}(-x)^{\frac{3}{2}}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right), & x<0\\ 0, & x=0\\ x^{\frac{3}{2}}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right), & x>0\end{cases}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=\begin{cases}-\frac{3}{2}\sqrt{-x}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{\sqrt{-x}}\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right), & x<0\\ 0, & x=0\\ \frac{3}{2}\sqrt{x}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{\sqrt{x}}\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right), & x>0\end{cases}$$

Με την βοήθεια των ακολουθιών $x_\nu = -\dfrac{1}{2\nu\pi + \dfrac{\pi}{2}}$ και $x_\nu = \dfrac{1}{2\nu\pi + \dfrac{\pi}{2}}$ αποδεικνύεται ότι η f' δεν είναι συνεχής στο 0.
Όμως, η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. του Διαφορικού Λογισμού για κάθε κλειστό διάστημα [α, β]. Έτσι λοιπόν, αν εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Τ. του Διαφορικού Λογισμού για την f στο διάστημα $\left[-\dfrac{6}{\pi},\ \dfrac{3}{\pi}\right]$, παίρνουμε:

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\dfrac{3}{\pi}\right) - f\left(-\dfrac{6}{\pi}\right)}{\dfrac{3}{\pi} - \dfrac{-6}{\pi}} = \frac{\left(\dfrac{3}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{3} - \left(\dfrac{6}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{6}}{\dfrac{3}{\pi} + \dfrac{6}{\pi}} = \cdots = \frac{\sqrt{3} - 6\sqrt{2}}{6\sqrt{\pi}} \ ,$$

για κάποιον αριθμό $\xi \in \left(-\dfrac{6}{\pi},\ \dfrac{3}{\pi}\right)$.

<u>Σημείωση</u>: Η παραπάνω μέση τιμή $\overline{f}' = \dfrac{\sqrt{3} - 6\sqrt{2}}{6\sqrt{\pi}}$ της f' προκύπτει και από το γενικευμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_{\frac{-6}{\pi}}^{\frac{3}{\pi}} f'(x)\frac{\pi}{9}dx \,,$$

το οποίο γράφεται ως άθροισμα δύο γενικευμένων ολοκληρωμάτων, ως εξής:

$$\int_{\frac{-6}{\pi}}^{\frac{3}{\pi}} f'(x)\frac{\pi}{9}dx \ = \int_{\frac{-6}{\pi}}^{0} f'(x)\frac{\pi}{9}dx \ + \int_{0}^{\frac{3}{\pi}} f'(x)\frac{\pi}{9}dx \,,$$

επειδή η f' δεν είναι φραγμένη κοντά στο 0.

<u>Γενίκευση του Θ.Μ.Τ. του Διαφορικού Λογισμού</u>

Έστω δύο συναρτήσεις f και g συνεχείς σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμες στο (α, β) με $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(x) = f'(x) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} g'(x), \ \ x \in (\alpha,\ \beta)\,.$$

Η μέση τιμή $\overline{h}$ της συνάρτησης h στο (α, β) με συνάρτηση σχετικής βαρύτητας των τιμών του (α, β) την $\sigma(x) = \dfrac{1}{\beta - \alpha}$, $x \in (\alpha,\ \beta)$ είναι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_\alpha^\beta h(x)\frac{1}{\beta - \alpha}dx$, το οποίο είναι ίσο με 0. Δηλαδή έχουμε:

$$\overline{h} = \int_{\alpha}^{\beta} h(x)\frac{1}{\beta-\alpha}dx = \int_{\alpha}^{\beta}\left(f'(x) - \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)}g'(x)\right)\frac{1}{\beta-\alpha}dx = \cdots = 0\,.$$

Αποδεικνύεται[3] ότι υπάρχει αριθμός $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε να ισχύει $\overline{h} = h(\xi)$. Η σχέση αυτή οδηγεί στην ισότητα:

$$f'(\xi) - \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)}g'(\xi) = 0\,,$$

η οποία ισοδύναμα γράφεται:

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,.$$

Η τελευταία ισότητα είναι γνωστή ως **γενίκευση του Θ.Μ.Τ. του Διαφορικού Λογισμού** (δείτε [5], σελ. 286) και αποδίδεται στον Cauchy. Αν $g(x) = x$ τότε έχουμε το γνωστό Θ.Μ.Τ. του Διαφορικού Λογισμού.

Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού

Το **Θεώρημα Μέσης Τιμής** του **Ολοκληρωτικού Λογισμού** μας δίνει την μέση τιμή μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$, η οποία είναι ολοκληρώσιμη σ' αυτό, όταν η συνάρτηση πυκνότητας σχετικής βαρύτητας των τιμών του $[\alpha, \beta]$ είναι η $\sigma(x) = \dfrac{1}{\beta-\alpha}$, $x \in [\alpha,\ \beta]$.

Δηλαδή έχουμε:

$$\overline{f} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\sigma(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\frac{1}{\beta-\alpha}dx = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\,.$$

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε σύμφωνα με την πρόταση 2 υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιος, ώστε να ισχύει $f(\xi) = \bar{f}$ ή ισοδύναμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = f(\xi)(\beta-\alpha)$ (δείτε [5], σελ. 226 και [6]).

<u>**Σημείωση**</u>: Η ύπαρξη ενός αριθμού ξ με την ιδιότητα αυτή στο ανοικτό διάστημα (α, β) απορρέει από το θεώρημα του Rolle που χρησιμοποιείται στην απόδειξη του Θ.Μ.Τ. του Διαφορικού Λογισμού και το Θ.Μ.Τ. του Διαφορικού Λογισμού χρησιμοποιείται για την απόδειξη του Θ.Μ.Τ. του Ολοκληρωτικού Λογισμού (δείτε [3], παράγραφο 3.6 B΄ μέρους).

<u>*Γενίκευση του Θ.Μ.Τ. του Ολοκληρωτικού Λογισμού*</u>

Έστω g μία συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της και επιπλέον ισχύει $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και υπάρχει $x_o \in [\alpha, \beta]$ τέτοιος, ώστε $g(x_o) > 0$.

---

[3] Με το θεώρημα του Rolle για την συνάρτηση $\phi(x) = f(x) - \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)}g(x),\ x \in [\alpha,\ \beta]$.

Αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, τότε η μέση τιμή της f στο $[\alpha, \beta]$ με σ.π.σ.β. για τις τιμές του $[\alpha, \beta]$ την

$$\sigma(x) = \frac{g(x)}{\int_\alpha^\beta g(t)dt}, \ x \in [\alpha, \beta]$$

είναι:

$$\bar{f} = \int_\alpha^\beta f(x)\sigma(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)\frac{g(x)}{\int_\alpha^\beta g(t)dt}dx = \frac{1}{\int_\alpha^\beta g(t)dt}\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx. \quad (5)$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, σύμφωνα με την πρόταση 2 υπάρχει αριθμός $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιος, ώστε να ισχύει $f(\xi) = \bar{f}$. (6)

Από τις (5) και (6) παίρνουμε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_\alpha^\beta g(x)dx.$$

Η τελευταία ισότητα αποτελεί **γενίκευση του Θ.Μ.Τ. του Ολοκληρωτικού Λογισμού** (δείτε [5], σελ. 226). Αν g(x) = 1 (σταθερή) τότε έχουμε το γνωστό Θ.Μ.Τ. του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

<u>Εφαρμογή 4</u>: Έστω ότι για μία συνεχή συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to IR$ ισχύει:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0.$$

Να αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό ν > 0 υπάρχουν ν πραγματικοί αριθμοί $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu$ στο (α, β) τέτοιοι, ώστε να ισχύει:

$$f(\xi_1) + f(\xi_2) + \cdots + f(\xi_\nu) = 0.$$

<u>Λύση</u>

Διαμερίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε ν διαστήματα πλάτους $\Delta x = \frac{\beta - a}{\nu}$ και εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. του Ολοκληρωτικού Λογισμού σε κάθε ένα από αυτά κλπ.

Επίλογος

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι η έννοια της μέσης τιμής είναι ενιαία σε διακριτά και συνεχή μεγέθη και συνδέεται με την έννοια του κέντρου βάρους ή κέντρου μάζας ενός σώματος.

Γι' αυτό, καλό είναι κατά την διδασκαλία να επισημαίνεται η σχέση μεταξύ των εννοιών αυτών, ώστε οι μαθητές να μπορούν να τις συνδέουν μεταξύ τους. Έτσι θα επιτυγχάνεται πιο ολοκληρωμένη μάθηση, αλλά και καλύτερη λειτουργία της μακρόχρονης μνήμης των μαθητών. Να σημειωθεί ότι, όσο πιο οργανωμένες και σημασιολογικά συνδεδεμένες είναι οι γνώσεις που αποθηκεύονται στην μακρόχρονη μνήμη, τόσο πιο πολύ χρόνο συγκρατούνται και πιο εύκολα ανασύρονται.

Επίσης, θεωρώ πως είναι πολύ σημαντικό να γνωρίζουν οι μαθητές την προέλευση της ονομασίας των θεωρημάτων Μέσης Τιμής του Διαφορικού και Ολοκληρωτικού Λογισμού και να μην αγνοούν την σημασιολογία τους.

Βιβλιογραφία

[1] Αδαμόπουλος Λ. Βισκαδουράκης Β. Γαβαλάς Δ. Πολύζος Γ. Σβέρκος Α. *Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Β΄ Γενικού Λυκείου*. ΙΤΥΕ "Διόφαντος" (2014).

[2] Αδαμόπουλος Λ. Δαμιανός Χ. Σβέρκος Α. *Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής Γ΄ Γενικού Λυκείου*. ΙΤΥΕ "Διόφαντος" (2014).

[3] Ανδρεαδάκης Σ. Κατσαργύρης Β. Μέτης Σ. Μπρουχτούρης Κ. Παπασταυρίδης Σ. Πολύζος Γ. *Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Γ΄ Γενικού Λυκείου*. ΙΤΥΕ "Διόφαντος" 2014.

[4] Κάκκουλος Ν. Θεόφιλος. *Μαθήματα Θεωρίας Πιθανοτήτων*. Αθήνα 1975.

[5] Κάππος Α. Δημήτριος. *Απειροστικός Λογισμός*. Αθήνα 1962.

[6] Γιαννόπουλος Απόστολος. *Απειροστικός Λογισμός*. (Διαθέσιμο on line: http://opencourses.uoa.gr/courses/MATH3/ , προσπελάθηκε στις 3-11-15).

[7] Θεοδωρόπουλος Λ. Παναγιώτης. *Μία γενίκευση της Αριθμητικής και Γεωμετρικής Προόδου – ο Σταθμικός μέσος ως γενικός μέσος*. (Διαθέσιμο on line: http://www.p-theodoropoulos.gr/ergasies/mathimat-proodos.pdf .

[8] Ιστοσελίδα: http://www2.ucy.ac.cy/~fotis/phy131/mylectures/lect20.pdf , προσπελάθηκε στις 15-11-2015).