Υποθετικές προτάσεις και λογική αλήθεια

Δρ. Παναγιώτης Λ. Θεοδωρόπουλος
Σχολικός Σύμβουλος κλάδου ΠΕ03
www.p-theodoropoulos.gr

Περίληψη

Στην εργασία αυτή επιχειρείται μια ερμηνεία της λογικής αλήθειας των λογικών υποθετικών προτάσεων της μορφής "αν p, τότε q" ($p \Rightarrow q$), όπου p και q λογικές προτάσεις. *Η εργασία αναφέρεται στη σημασιολογική και συντακτική αλήθεια των υποθετικών προτάσεων και πλαισιώνεται από παραδείγματα και εφαρμογές που στηρίζονται και υποστηρίζουν τον πίνακα αλήθειας της συνεπαγωγής.*

Εισαγωγή

Ο Αριστοτέλης, ο οποίος από όσο γνωρίζουμε ήταν ο πρώτος που ασχολήθηκε συστηματικά με τη Λογική, συνέδεσε τις *υποθετικές προτάσεις* με τη *μαθηματική αλήθεια* και την *αποδεικτική διαδικασία* (βλέπε [2]). Αν αποδειχθεί η αλήθεια μιας υποθετικής πρότασης της μορφής "αν *p*, τότε *q*" και η πρόταση *p είναι αληθής*, τότε και η πρόταση *q* θα είναι *αναγκαία αληθής*[1]. Έτσι αντιμετώπιζε ο Αριστοτέλης την αναγκαία αλήθεια στα Μαθηματικά. Πίστευε δηλαδή ότι η μαθηματική αλήθεια πηγάζει από τις αληθείς υποθετικές προτάσεις, που η αλήθειά τους αποδεικνύεται και όχι από τον ανεξάρτητο και αναλλοίωτο κόσμο των μαθηματικών Ιδεών όπως πίστευε ο Πλάτων. Ακόμη, ο Αριστοτέλης διατύπωσε και λογικούς κανόνες με τη βοήθεια των οποίων μπορούμε να συλλογιζόμαστε σωστά. Αυτούς τους αποδεικτικούς κανόνες χρησιμοποίησε και ο Ευκλείδης στις αποδείξεις του (βλέπε [5]).

Τι σημαίνει όμως *αλήθεια* για μία λογική υποθετική πρόταση; Αυτό θα προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε στις επόμενες παραγράφους.

1. Ο πίνακας αλήθειας της συνεπαγωγής

Όλοι συμφωνούμε ότι η υποθετική πρόταση «*Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, τότε οι γωνίες τους είναι μία προς μία ίσες*» είναι αληθής. Σ' αυτήν την υποθετική πρόταση παρατηρούμε ότι υπάρχει περίπτωση να μην ισχύει η υπόθεση και να ισχύει το συμπέρασμα (όμοια τρίγωνα) ή να μην ισχύει ούτε η υπόθεση ούτε το συμπέρασμα. *Σε κάθε περίπτωση όμως που ισχύει η υπόθεση θα ισχύει και το συμπέρασμα.*

Συνδέοντας τώρα την αλήθεια μιας μαθηματικής υποθετικής πρότασης με τη λογική απόδειξη μπορούμε να πούμε ότι:

Αν σε μία μαθηματική υποθετική πρόταση η μετάβαση από την υπόθεση στο συμπέρασμα γίνεται λογικά και μαθηματικά με ορθό τρόπο, τότε αυτή η υποθετική πρόταση θεωρείται αληθής (βλέπε θεωρήματα). Σε μια τέτοια περίπτωση, όταν η υπόθεση είναι αληθής τότε και το συμπέρασμα είναι αναγκαία αληθές.

---

[1] Στο Προτασιακό Λογισμό ο τρόπος αυτός συμπερασμού είναι γνωστός ως αποδεικτικός κανόνας *modus ponens* και σχηματικά αποδίδεται ως εξής:

$$\frac{p \to q,\, p}{q}$$

Επομένως, εκείνο που έχει σημασία για την απόδειξη μιας υποθετικής πρότασης δεν είναι η αλήθεια ή το ψεύδος των μερών της υποθετικής πρότασης, αλλά *η αλήθεια της υπόθεσης να συνεπάγεται την αλήθεια του συμπεράσματος*. Έτσι λοιπόν, μία σωστή αποδεικτική διαδικασία είναι δυνατόν να μας οδηγεί από *ψευδή* υπόθεση σε *ψευδές ή αληθές* συμπέρασμα, αλλά ποτέ από *αληθή υπόθεση* σε *ψευδές συμπέρασμα*. Χαρακτηριστικά είναι τα παραδείγματα που ακολουθούν.

1.1 Παραδείγματα:

(i) Η υποθετική πρόταση

«Αν 5 > 3, τότε 10 > 6»,

με *αληθή υπόθεση* και *αληθές συμπέρασμα*, είναι *αληθής*, διότι η μετάβαση από την υπόθεση στο συμπέρασμα είναι λογικά και μαθηματικά ορθή. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της πρώτης ανισότητας με το 2.

(ii) Στην υποθετική πρόταση

«Αν 2 > 3, τότε 4 > 6»,

με *ψευδή υπόθεση* και *ψευδές συμπέρασμα*, η μετάβαση από την υπόθεση στο συμπέρασμα είναι μαθηματικά και λογικά ορθή. Και εδώ πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της πρώτης ανισότητας με το 2. Αν η υπόθεση ήταν αληθής, τότε και το συμπέρασμα θα ήταν αληθές. Συνεπώς αυτή η υποθετική πρόταση θεωρείται *αληθής*.

(iii) Στην υποθετική πρόταση

«Αν 3 = -3 και -2 = 2, τότε -6 = -6»,

με *ψευδή υπόθεση* και *αληθές συμπέρασμα*, η μετάβαση από την υπόθεση στο συμπέρασμα γίνεται με σωστό τρόπο. Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις δύο ισότητες της υπόθεσης. Επομένως και αυτή η πρόταση θεωρείται *αληθής*.

(iv) Αντίθετα η υποθετική πρόταση

«Αν 4 > 2, τότε -4 > -2»,

με *αληθή υπόθεση* και *ψευδές συμπέρασμα*, δε μπορεί να είναι *αληθής*, διότι η διαδικασία μετάβασης από την υπόθεση στο συμπέρασμα δεν είναι σωστή. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της πρώτης ανισότητας με το -1, αλλά δεν αλλάζουμε τη φορά της ανισότητας.

Πρέπει να σημειωθεί όμως ότι δε μπορούμε να αποδώσουμε τιμή αλήθειας σε κάθε υποθετική πρόταση με την αποδεικτική διαδικασία, όπως για παράδειγμα στην πρόταση «*αν* 5 > 8, *τότε ο αριθμός* 5 *είναι άρτιος*». Γενικά τιμή αλήθειας σε μια υποθετική πρόταση αποδίδεται με τη βοήθεια του πίνακα αλήθειας της συνεπαγωγής. Σύμφωνα με τον Προτασιακό Λογισμό, αν οι προτασιακές μεταβλητές ενός λογικού τύπου αντικατασταθούν με λογικές προτάσεις, τότε προκύπτει λογική πρόταση της οποίας η τιμή αλήθειας προσδιορίζεται σύμφωνα με τον αληθοπίνακα του λογικού τύπου.

Αν παραστήσουμε με 1 την τιμή αλήθειας μιας αληθούς πρότασης και με 0 μιας ψευδούς, τότε ο πίνακας αλήθειας της συνεπαγωγής, όπως φαίνεται και από τα παραπάνω παραδείγματα, είναι:

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Μελετώντας τον παραπάνω πίνακα αλήθειας της συνεπαγωγής παρατηρούμε ότι μία συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$ θεωρείται *αληθής* στην περίπτωση που *"η p είναι ψευδής ή η q αληθής" ή ισοδύναμα όταν "η $\overline{p}$ είναι αληθής ή η q αληθής", δηλαδή όταν τουλάχιστον μία πρόταση από τις* $\overline{p}$ και q είναι αληθής. Παρατηρούμε λοιπόν ότι οι λογικοί τύποι $p \Rightarrow q$ και $\overline{p} \vee q$ έχουν την ίδια λογική αλήθεια. Αυτό σημαίνει ότι είναι λογικά ισοδύναμοι (συμβολικά $p \Rightarrow q \equiv \overline{p} \vee q$), δηλαδή έχουν τον ίδιο βραχύ[2] πίνακα αλήθειας. Για επιβεβαίωση, ο πίνακας αλήθειας του τύπου $\overline{p} \vee q$ είναι:

p	q	$\overline{p}$	$\overline{p} \vee q$
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

Οι δύο πρώτες γραμμές του πίνακα αλήθειας της συνεπαγωγής γίνονται εύκολα κατανοητές. Εκείνες όμως που δε γίνονται εύκολα κατανοητές και δημιουργούν απορίες και προβληματισμό είναι η τρίτη και η τέταρτη, δηλαδή γιατί μια υποθετική πρόταση θεωρείται αληθής όταν η υπόθεσή της είναι ψευδής. Την ορθότητα αυτών των γραμμών και γενικά την παραπάνω λογική ισοδυναμία θα προσπαθήσουμε να υποστηρίξουμε στη συνέχεια με διάφορους τρόπους στο πλαίσιο του Προτασιακού και Κατηγορηματικού Λογισμού.

Είδαμε ότι σε μία αληθή υποθετική πρόταση όταν η υπόθεση είναι αληθής, τότε και το συμπέρασμα είναι αναγκαία αληθές. Με τη συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$, λοιπόν, δηλώνεται ότι *στην περίπτωση που η πρόταση p είναι αληθής τότε και η q θα είναι αναγκαία αληθής ή, με άλλα λόγια, ότι δε μπορεί, να είναι αληθής η p και η q ψευδής*. Για παράδειγμα, η υποθετική πρόταση που αναφέραμε στην αρχή: "*Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, τότε οι γωνίες τους είναι μία προς μία ίσες*" μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής: "*Δεν είναι δυνατόν, δύο τρίγωνα να είναι ίσα και οι γωνίες τους να μην είναι ίσες μία προς μία* ".

Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι ισχυρισμοί:

"*αν p, τότε q*" και "*όχι, p και όχι q*"

έχουν το ίδιο λογικό περιεχόμενο (βλέπε [3] και [11]), οπότε αναμένεται οι αντίστοιχοί λογικοί τύποι:

$$p \Rightarrow q \quad \text{και} \quad \overline{p \wedge \overline{q}}$$

να είναι λογικά ισοδύναμοι. Παρατηρώντας τον πίνακα αλήθειας του τύπου $\overline{p \wedge \overline{q}}$, που είναι:

p	q	$\overline{q}$	$p \wedge \overline{q}$	$\overline{p \wedge \overline{q}}$
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1

[2] Ο βραχύς πίνακας αλήθειας ενός λογικού τύπου αποτελείται από τις βασικές στήλες των προτασιακών μεταβλητών και από την τελευταία στήλη που αναφέρεται στο λογικό τύπο (βλέπε [10]).

διαπιστώνουμε ότι πράγματι αυτοί οι λογικοί τύποι είναι λογικά ισοδύναμοι, δηλαδή ισχύει: $p \Rightarrow q \equiv \overline{p \wedge \overline{q}}$. Ακόμη βλέπουμε ότι ισχύει και η λογική ισοδυναμία:

$$\overline{p \wedge \overline{q}} \equiv \overline{p} \vee q \text{ (Νόμος του De Morgan).}$$

Έτσι λοιπόν αιτιολογείται η λογική ισοδυναμία $p \Rightarrow q \equiv \overline{p} \vee q$.

(Ο τύπος $\overline{p \wedge \overline{q}}$ συνδέει λογικά τους τύπους $p \Rightarrow q$ και $\overline{p} \vee q$).

Έστω τώρα ότι έχουμε δύο προτασιακούς τύπους $p(x)$ και $q(x)$ με το ίδιο σύνολο αναφοράς Ω για τους οποίους ισχύει:
«*Για οποιοδήποτε στοιχείο* x_o *του* Ω *που η πρόταση* $p(x_o)$ *είναι αληθής, τότε και η πρόταση* $q(x_o)$ *είναι αναγκαία αληθής*».

Αυτό σημαίνει ότι στο Ω ο ισχυρισμός $p(x)$ συνεπάγεται τον ισχυρισμό $q(x)$ ή ότι η πρόταση[3] $(\forall x \in \Omega)[p(x) \to q(x)]$ είναι αληθής.

Αν A και B είναι τα σύνολα αλήθειας των $p(x)$ και $q(x)$ αντίστοιχα, δηλαδή αν

$$A = \{x \in \Omega \ / \ p(x) \text{ αληθής}\} \quad \text{και} \quad B = \{x \in \Omega \ / \ q(x) \text{ αληθής}\},$$

τότε προφανώς ισχύει $A \subseteq B$. Για παράδειγμα, για την αληθή πρόταση:

$$(\forall a \in IR)[a^2 \neq a \to a \neq 1],$$

που αναφέρεται στο σχολικό βιβλίο ([4]) τα σύνολα αλήθειας είναι αντίστοιχα $A = IR - \{0, 1\}$ και $B = IR - \{1\}$.

Βλέπουμε ότι η σχέση εγκλεισμού “⊆” της Θεωρίας Συνόλων συνδέεται με το λογικό σύνδεσμο της συνεπαγωγής “⇒”. Γενικότερα είναι γνωστό ότι οι συνολοθεωρητικές πράξεις, οι πράξεις μιας άλγεβρας Boole και οι λογικές πράξεις συσχετίζονται μεταξύ τους. Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζεται η διασύνδεση μεταξύ πράξεων και σχέσεων της Θεωρίας Συνόλων και λογικών συνδέσμων[4].

Θεωρία Συνόλων	**Λογική**
$A \subseteq B$	$p \Rightarrow q$
$A = B$	$p \Leftrightarrow q$
$A \cup B$	$p \vee q$
$A \dotplus B$	$p \veebar q$
$A \cap B$	$p \wedge q$
A^c	$\overline{p}$

Όπως γνωρίζουμε ισχύει η ισοδυναμία:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A^c \cup B = \Omega \quad (1)$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η πρόταση $(\forall x \in \Omega)[p(x) \to q(x)]$ είναι *αληθής* εάν και μόνον εάν $A \subseteq B$ ή σύμφωνα με την (1) εάν και μόνον εάν $A^c \cup B = \Omega$, δηλαδή εάν

[3] Ένας τύπος χωρίς ελεύθερες μεταβλητές λέγεται πρόταση. Μία μεταβλητή που βρίσκεται στην εμβέλεια ενός ποσοδείκτη δεν είναι ελεύθερη.

[4] Ας θυμηθούμε την αντιστοιχία μεταξύ των λογικών συνδέσμων και των πράξεων με ενδεχόμενα, που αναφέρεται και στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Γενικής Παιδείας της Γ΄ Λυκείου (βλ. [1]).

και μόνον εάν για κάθε στοιχείο x_o του Ω η πρόταση $p(x_o)$ είναι *ψευδής* ή η $q(x_o)$ *αληθής*. Αυτό ενισχύει τη λογική ισοδυναμία:

$$p \Rightarrow q \equiv \overline{p} \vee q$$

που είδαμε παραπάνω.

Στις αληθείς υποθετικές προτάσεις, που εκφράζονται με μεταβλητές και αποδεικνύεται η αλήθειά τους, συνήθως εμφανίζονται και οι τρεις περιπτώσεις αλήθειας της συνεπαγωγής. Σχετικό είναι το επόμενο παράδειγμα.

1.2 Παράδειγμα: Χωρίς αμφιβολία η υποθετική πρόταση:

Αν $\alpha = \beta$, τότε $\alpha^2 = \beta^2$

είναι αληθής. Όπως διατυπώνεται αυτή η υποθετική πρόταση είναι ένας σύνθετος προτασιακός τύπος με ελεύθερες μεταβλητές το ζεύγος (α, β) και πεδίο ορισμού το IR^2. Με τη βοήθεια όμως του καθολικού ποσοδείκτη στη πρωτοβάθμια γλώσσα της δομής των πραγματικών αριθμών διατυπώνεται ως πρόταση ως εξής:

$$(\forall a \in IR)(\forall b \in IR)[a = b \rightarrow a^2 = b^2],$$

η οποία είναι προφανώς *αληθής*, δηλαδή έχει τιμή αλήθειας 1.

Αν με $\| p \|$ συμβολίσουμε την τιμή αλήθειας μιας πρότασης p, τότε η τιμή αλήθειας της παραπάνω πρότασης είναι[5]:

$$\left\| (\forall (a,b) \in IR^2)\left[a = b \rightarrow \alpha^2 = b^2\right] \right\| = \bigwedge_{(a,b)\in IR^2} \| a = b \rightarrow \alpha^2 = b^2 \| = 1.$$

Άρα, για οποιεσδήποτε τιμές α_0 και β_0 των μεταβλητών α και β αντίστοιχα, η συνεπαγωγή:

$$a_0 = b_0 \Rightarrow a_0^2 = b_0^2$$

είναι *αληθής*.

Εύκολα μπορεί να παρατηρήσει κανείς ότι στην παραπάνω *αληθή* συνεπαγωγή εμφανίζονται όλες οι περιπτώσεις αλήθειας μιας συνεπαγωγής. Για παράδειγμα,

- για $\alpha = 2$ και $\beta = 2$ έχουμε *αληθή* υπόθεση και *αληθές* συμπέρασμα
- για $\alpha = 2$ και $\beta = -2$ έχουμε *ψευδή* υπόθεση και *αληθές* συμπέρασμα
- για $\alpha = 2$ και $\beta = 3$ έχουμε *ψευδή* υπόθεση και *ψευδές* συμπέρασμα.

Τέλος, αξίζει να αναφερθεί ότι η αποδεικτική μέθοδος «*απαγωγή σε άτοπο*», η οποία χρησιμοποιείται επί αιώνες στα Μαθηματικά χωρίς λογικά προβλήματα, στηρίζεται στον παραπάνω πίνακα αλήθειας της συνεπαγωγής.

Έχει ενδιαφέρον να δούμε πώς λειτουργεί λογικά η «*απαγωγή σε άτοπο*» για την απόδειξη μιας συνεπαγωγής (βλέπε [6]).

Εύκολα αποδεικνύεται ότι ο λογικός τύπος:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((p \wedge \overline{q}) \Rightarrow (r \wedge \overline{r}))$$

είναι ταυτολογία. Ο τύπος αυτός για την περίπτωση της συνεπαγωγής[6] εκφράζει συντακτικά την παραπάνω μέθοδο. Αυτό σημαίνει ότι οι προτασιακοί τύποι:

$p \Rightarrow q$[7] και $(p \wedge \overline{q}) \Rightarrow (r \wedge \overline{r})$ είναι λογικά ισοδύναμοι.

---

[5] Έτσι ορίζεται η τιμή αλήθειας μιας πρότασης με καθολικό ποσοδείκτη, ο οποίος θεωρείται σύμβολο γενικευμένης σύζευξης.

[6] Για την απόδειξη της αλήθειας μιας πρότασης p με «απαγωγή σε άτοπο» χρησιμοποιείται η ταυτολογία: $p \Leftrightarrow (\overline{p} \Rightarrow (r \wedge \overline{r}))$.

[7] Για τυπικούς λόγους θα μπορούσαμε να πάρουμε τον τύπο $(p \Rightarrow q) \wedge (r \vee \overline{r})$.

Επομένως, όταν θέλουμε να αποδείξουμε την αλήθεια μιας συνεπαγωγής $p \Rightarrow q$, μπορούμε ισοδύναμα να αποδείξουμε τη συνεπαγωγή $(p \wedge \overline{q}) \Rightarrow (r \wedge \overline{r})$. Αποδεικνύοντας την τελευταία συνεπαγωγή, επειδή η πρόταση $r \wedge \overline{r}$ (συμπέρασμα) είναι *ψευδής*, συμπεραίνουμε ότι και η πρόταση $p \wedge \overline{q}$ (υπόθεση) είναι *ψευδής*, οπότε η άρνησή της, δηλαδή η πρόταση $\overline{p \wedge \overline{q}}$, θα είναι *αληθής*. Όμως, όπως είδαμε ισχύει η λογική ισοδυναμία $p \Rightarrow q \equiv \overline{p \wedge \overline{q}}$. Έτσι λοιπόν η συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$ είναι *αληθής*.

Κλείνοντας την ενότητα αξίζει να δούμε πώς προκύπτει με τη βοήθεια του πίνακα αλήθειας της συνεπαγωγής ότι το κενό σύνολο είναι υποσύνολο κάθε συνόλου (βλέπε [7]).

Λέμε ότι ένα σύνολο B είναι υποσύνολο ενός συνόλου A εάν και μόνον εάν κάθε στοιχείο του B είναι και στοιχείο του A ή σε συμβολική γλώσσα:

$$B \subseteq A \underset{or.}{\Leftrightarrow} (\forall x)[x \in B \to x \in A].$$

Αν $B = \varnothing$, τότε για οποιοδήποτε σύνολο A η πρόταση $(\forall x)[x \in \varnothing \to x \in A]$ είναι αληθής, επειδή για κάθε x η πρόταση “$x \in \varnothing$” είναι ψευδής.

Αφού λοιπόν ικανοποιείται η συνθήκη του παραπάνω ορισμού, συμπεραίνουμε ότι το κενό σύνολο είναι υποσύνολο οποιουδήποτε συνόλου.

2. Φυσική και Λογική Συνεπαγωγή

Αξίζει να σημειωθεί ότι στην καθημερινή ζωή μια υποθετική πρόταση (φυσική συνεπαγωγή) χρησιμοποιείται με διαφορετικό τρόπο από τον τρόπο που λειτουργεί μια συνεπαγωγή στη Λογική (λογική συνεπαγωγή).

Σε μια φυσική συνεπαγωγή η σχέση της υπόθεσης με το συμπέρασμα είναι αιτιακή, συνήθως με χρονική διαδοχή και ο ισχυρισμός δηλώνει ότι εφόσον πραγματοποιηθεί (ή πραγματοποιείται) η υπόθεση, τότε θα πραγματοποιηθεί (ή πραγματοποιείται) και το συμπέρασμα. Μία φυσική συνεπαγωγή λοιπόν έχει νόημα μόνο όταν η υπόθεση είναι αληθής (βλέπε [3], [7] και [8]).

Σε μία λογική συνεπαγωγή η σχέση της υπόθεσης με το συμπέρασμα είναι λογική και η πρόταση σύμφωνα με τη Λογική χαρακτηρίζεται πάντα ως αληθής ή ψευδής. Ο ισχυρισμός εδώ δηλώνει ότι δε μπορεί να ικανοποιείται η υπόθεση και να μην ικανοποιείται το συμπέρασμα.

Για να γίνουν περισσότερο κατανοητά τα παραπάνω, ας δούμε ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα.

2.1 Παράδειγμα: Έστω ότι ένας πατέρας είπε στο γιο του: «*Αν στο πορτοφόλι μου έχω περισσότερα από 100 ευρώ, τότε θα σου δώσω 10 ευρώ*». Την πρόταση αυτή μπορούμε να τη δούμε και ως φυσική συνεπαγωγή και ως λογική. Συγκεκριμένα λοιπόν έχουμε:

Αν ικανοποιείται η υπόθεση και ο πατέρας αυτός δώσει στο γιο του 10 ευρώ, τότε η παραπάνω πρόταση θα είναι *αληθής*[8] και ο πατέρας αποδεικνύεται ειλικρινής. Αν, όμως, δε δώσει στο γιο του 10 ευρώ, τότε η πρόταση θα είναι *ψευδής* και ο πατέρας ανειλικρινής. Έως εδώ η φυσική συνεπαγωγή συμφωνεί με την αντίστοιχη λογική συνεπαγωγή. Αν τώρα τα χρήματα στο πορτοφόλι δεν είναι περισσότερα από 100 ευρώ και δούμε την παραπάνω υποθετική πρόταση ως φυσική συνεπαγωγή, τότε δεν τίθεται θέμα αλήθειας της πρότασης αυτής και ειλικρίνειας του πατέρα, αφού δεν ικανο-

[8] Πρόκειται για την *“a posteriori”* αλήθεια, η οποία στηρίζεται σε εμπειρικά δεδομένα.

ποιείται η υπόθεση. Αν όμως τη δούμε ως λογική συνεπαγωγή, τότε, είτε ο πατέρας δώσει στο γιο του 10 ευρώ είτε όχι, πώς μπορούμε να ισχυρισθούμε ότι η πρόταση αυτή, η οποία δεν είναι αντιφατική, είναι ψευδής; Με τι στοιχεία; Γι' αυτό λοιπόν τη δεχόμαστε ως αληθή.

3. Υποθετικές προτάσεις και Διδακτική

Είδαμε ότι μία *συνεπαγωγή* είναι *αληθής* όταν η *υπόθεση* είναι *ψευδής* ή όταν το *συμπέρασμα* είναι *αληθές και ψευδής μόνο αν η υπόθεση είναι αληθής και το συμπέρασμα ψευδές*. Γι' αυτό λοιπόν, όταν θέλουμε να αποδείξουμε την *αλήθεια* μιας *υποθετικής πρότασης*, θεωρούμε ότι η *υπόθεση* είναι *αληθής* και αποδεικνύουμε ότι η *αλήθεια* της *υπόθεσης* συνεπάγεται την *αλήθεια* του *συμπεράσματος*.

Αυτό ίσως δημιουργήσει κάποια σύγχυση στους μαθητές, οι οποίοι δεν έχουν γνώσεις Μαθηματικής Λογικής. Θυμάμαι χαρακτηριστικά ότι μία άριστη μαθήτρια της Γ΄ Γυμνασίου στην απόδειξη της υποθετικής πρότασης:

«Αν α > β, τότε α + γ > β + γ»

δε μπορούσε να κατανοήσει γιατί θεωρούμε τη διαφορά α – β θετική και μου έλεγε: «*Κύριε, λέμε “ **αν** α > β”. Δεν είναι σίγουρο ότι ισχύει*».

Διδακτικά, λοιπόν, για να αποφευχθεί ένας τέτοιος προβληματισμός στους μαθητές του *γυμνασίου*, μπορούμε να λέμε ότι με μία πρόταση σαν την παραπάνω δηλώνουμε ότι στην περίπτωση που ισχύει η υπόθεση θα ισχύει και το συμπέρασμα. Γι' αυτό, όταν θέλουμε να αποδείξουμε μία τέτοια πρόταση θεωρούμε ότι ισχύει η υπόθεση και αποδεικνύουμε ότι στην περίπτωση αυτή ισχύει υποχρεωτικά και το συμπέρασμα.

Οι μαθητές του λυκείου, όμως, καλό είναι να έχουν ολική αντίληψη για τις υποθετικές προτάσεις γιατί τις χρησιμοποιούν στις αποδείξεις και στους συλλογισμούς τους. Γι' αυτό λοιπόν στο λύκειο, πιστεύω πως θα πρέπει να τονίζουμε ότι:
“Με *μία υποθετική πρόταση δηλώνουμε πως η αλήθεια της υπόθεσης συνεπάγεται την αλήθεια του συμπεράσματος, αλλά η αλήθεια του συμπεράσματος δεν εξαρτάται πάντα αποκλειστικά και μόνο από την αλήθεια της υπόθεσης, δηλαδή είναι δυνατόν να μην ισχύει η υπόθεση και το συμπέρασμα να ισχύει”*.

Έτσι θα αποφύγουμε και την εσφαλμένη εντύπωση που δημιουργείται πολλές φορές στους μαθητές (βλέπε [9]), πως *γενικά, όταν δεν ισχύει η υπόθεση σε μία συνεπαγωγή δεν ισχύει και το συμπέρασμα*. Μπορούμε να αναφέρουμε υποστηρικτικά και διάφορα παραδείγματα, όπως π.χ. το παραπάνω με τα ίσα τρίγωνα. Επίσης, ένα σχετικό παράδειγμα για τη Γ΄ Λυκείου είναι το εξής:

Για τη συνάρτηση

$$f(x) = -x^2 + 4x - 3$$

δεν ισχύει η υπόθεση του Θεωρήματος Rolle για το διάστημα [0, 3] αφού $f(0) \neq f(3)$, ενώ το συμπέρασμα ισχύει αφού $f'(2) = 0$.

Ακόμη, θα πρέπει να εξηγούμε στους μαθητές γιατί κάποιες συγκεκριμένες συνεπαγωγές δεν ισχύουν και αντίστροφα[9], ώστε να συνειδητοποιούν τη διαφορά ανάμεσα σε μία απλή συνεπαγωγή και σε μία ισοδυναμία και να είναι σε θέση να ελέγχουν πότε μία συνεπαγωγή ισχύει και αντίστροφα. Έτσι, θα μπορούν να εφαρμόζουν σωστά τις συνεπαγωγές και τις ισοδυναμίες στην επίλυση ασκήσεων και προβλημάτων. Αυτό, επειδή έχει παρατηρηθεί ότι πολλοί μαθητές δεν έχουν κατανοήσει ποιες συνεπα-

[9] Σ' αυτές εμφανίζεται η περίπτωση να είναι ψευδής η υπόθεση και αληθές το συμπέρασμα.

γωγές δεν ισχύουν και αντίστροφα και εξαιτίας αυτού κάνουν λανθασμένους συλλογισμούς. Για παράδειγμα, αν γνωρίζουν ή αν αποδείξουν ότι δύο μιγαδικοί αριθμοί έχουν ίσα μέτρα, τότε συμπεραίνουν (λανθασμένα) ότι οι μιγαδικοί αυτοί είναι ίσοι.

Βιβλιογραφία

[1] Αδαμόπουλος Λ. – Δαμιανού Χ. – Σβέρκος Α. : *Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής. Βιβλίο για τη Γ΄ τάξη Ενιαίου Λυκείου* Ο.Ε.Δ.Β. (2010).

[2] Αναπολιτάνος Α. Διονύσιος: *Εισαγωγή στη φιλοσοφία των Μαθηματικών. Αθήνα* 1985.

[3] Αναπολιτάνος Δ. – Γαβαλάς Δ. – Δέμης Α. – Δημητρακόπουλος Κ. – Καρασμά νης Β.: *ΛΟΓΙΚΗ Θεωρία και Πρακτική. Βιβλίο για τη Γ΄ τάξη Ενιαίου Λυκείου*. Ο.Ε.Δ.Β. (1999).

[4] Ανδρεαδάκης Σ. – Κατσαργύρης Β. – Παπασταυρίδης Σ. – Πολύζος Γ. – Σβέρκος Α.: *Άλγεβρα Α΄ Γενικού Λυκείου*. Ο.Ε.Δ.Β. (2010).

[5] Δημητρακόπουλος Κωνσταντίνος: *Μαθηματική Λογική*. Πάτρα 2003.

[6] Δρόσος Αθ. Κώστας: *Εισαγωγή στη Μαθηματική σκέψη, τόμος 1ος: Μαθηματικές περιηγήσεις*. Πάτρα 1999.

[7] Δρόσος Κ. - Καραζέρης Π. - Παπαδοπετράκης Ε.: *Εισαγωγή στη Μαθη ματική Λογική*. Πάτρα 2006.

[8] Εξαρχάκος Θεόδωρος: *Εισαγωγή στα Μαθηματικά. Τόμος Α΄ Άλγεβρα*. Αθήνα 1991.

[9] Θωμαΐδης Γιάννης: *Λογική και Διδακτική στην Άλγεβρα της Α΄Λυκείου*. Περιοδικό «Ευκλείδης γ΄» της Ε.Μ.Ε. τ. 73 (2010).

[10] Μητακίδης Γεώργιος: *Μαθηματική Λογική*. Πανεπιστήμιο Πατρών. (1980).

[11] Πολύζος Γεώργιος: *Μερικά σχόλια για τη συνεπαγωγή και μια πρόταση για την επέκταση της λειτουργίας της και στην περίπτωση που η υπόθεση είναι ψευδής*. Περιοδικό «Ευκλείδης γ΄» της Ε.Μ.Ε. τ. 72 (2010).