Η παιδαγωγική διάσταση των πολλών τρόπων επίλυσης ενός προβλήματος

Δρ. Παναγιώτης Λ. Θεοδωρόπουλος
Σχολικός Σύμβουλος κλάδου ΠΕ03
www.p-theodoropoulos.gr

Εισαγωγή

Μία χαρακτηριστική ιδιότητα των Μαθηματικών είναι η έλλειψη αντιφάσεων. Δηλαδή, αν συλλογισθούμε με οποιονδήποτε τρόπο σύμφωνα με τους κανόνες της Λογικής στο πλαίσιο μιας μαθηματικής θεωρίας δεν οδηγούμαστε ποτέ σε λογικά αντίθετες προτάσεις. Έτσι λοιπόν μία άσκηση μπορεί να λύνεται με περισσότερους από έναν τρόπους. Η ποικιλία των λύσεων μας προκαλεί ευάρεστα συναισθήματα[1] και χαιρόμαστε πραγματικά όταν σε ένα πρόβλημα οι μαθητές δίνουν διαφορετικές και πρωτότυπες λύσεις και θαυμάζουμε τον πλούτο που κρύβει η παιδική μαθηματική σκέψη! Επίσης, θαυμάζουμε και τις λύσεις που απαιτούν έναν ειδικό και ξεχωριστό τρόπο σκέψης και πιστεύω πως διδασκόμαστε όλοι από αυτό.

Από παιδαγωγική άποψη καλό είναι να παρουσιάζονται και να συζητούνται στην τάξη όλες οι διαφορετικές λύσεις που δίνουν οι μαθητές, διότι έτσι και οι μαθητές ικανοποιούνται για τις λύσεις τους και την προσπάθεια που καταβάλλουν, αλλά και οι υπόλοιποι μαθητές μαθαίνουν και άλλους τρόπους σκέψης που ίσως τους χρησιμοποιήσουν σε παρόμοιες περιπτώσεις. Αυτό αναπτύσσει ένα κλίμα συνεργασίας και ενεργητικής συμμετοχής των μαθητών στην μαθησιακή διαδικασία και βοηθά πολύ στην ανάπτυξη θετικής στάσης απέναντι στα Μαθηματικά.

Ως εκπαιδευτικοί πρέπει να ενθαρρύνουμε τις τακτικές δημιουργίας πολλαπλών λύσεων ενός προβλήματος. Ένας τεχνικός τρόπος με τον οποίον είναι δυνατόν να επιτευχθούν μέσα στην τάξη διαφορετικές λύσεις σε ένα πρόβλημα (αν υπάρχουν) είναι η ομαδοσυνεργατική μορφή διδασκαλίας. Σύμφωνα με την ομαδοσυνεργατική μάθηση οι μαθητές ενός τμήματος χωρίζονται σε ομάδες των 3-5 ατόμων και η κάθε ομάδα εργάζεται χωριστά. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού σε μια τέτοια διαδικασία είναι κυρίως συντονιστικός και καθοδηγητικός. Στο τέλος όλες οι ομάδες παρουσιάζουν στην ολομέλεια της τάξης τις λύσεις τους, οι οποίες μπορεί να είναι διαφορετικές, αναπτύσσοντας τις ιδέες και τις σκέψεις τους[2].

Ως παράδειγμα προβλήματος με πολλές διαφορετικές λύσεις αναφέρουμε το ερώτημα Β2 των θεμάτων των Μαθηματικών της Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης των ημερησίων λυκείων των φετινών πανελληνίων εξετάσεων για το οποίο πα-

---

[1] Με την ευκαιρία ας θυμηθούμε τον πολύ μεγάλο αριθμό των διαφορετικών τρόπων απόδειξης του Πυθαγορείου θεωρήματος.

[2] Μια τέτοια μορφή διδασκαλίας καλό είναι να προγραμματίζεται και να υλοποιείται σε δύο συνεχόμενες διδακτικές ώρες, ώστε να υπάρχει αρκετός χρόνος και για την συνεργασία των μελών των ομάδων, αλλά και για την παρουσίαση των αποτελεσμάτων όλων των ομάδων.

ραθέτουμε 12 διαφορετικές λύσεις (ίσως να υπάρχουν και άλλες), 8 αλγεβρικές και 4 γεωμετρικές. Αξίζει να σημειωθεί, και έχει ιδιαίτερη σημασία αυτό, ότι όλες οι λύσεις που παρατίθενται έχουν δοθεί από μαθητές!

Ας θυμηθούμε λοιπόν αυτό το ερώτημα και στη συνέχεια ας δούμε τους 12 διαφορετικούς τρόπους λύσης.

ΘΕΜΑ Β (Απόσπασμα)

«Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει η επόμενη σχέση:

$$|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4$$

Β1. *Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα* ρ = 1.

Β2. *Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με* $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$,

τότε να βρείτε το $|z_1 + z_2|$».

Λύσεις του Β2

Πρέπει να σημειωθεί ότι στις λύσεις που ακολουθούν θεωρούμε ως γνωστό το συμπέρασμα του ερωτήματος Β1, δηλαδή ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 βρίσκονται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο, οπότε ισχύουν όλες οι σχετικές σχέσεις τις οποίες και χρησιμοποιούμε χωρίς να κάνουμε ιδιαίτερη αναφορά κάθε φορά που τις χρησιμοποιούμε. Αυτό διακρίνεται εύκολα μέσα στις λύσεις.

Α΄ Αλγεβρικές λύσεις

1η λύση

Για την δοθείσα ισότητα παίρνουμε διαδοχικά τις ισοδύναμες σχέσεις:

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z_1 - z_2|^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) = 2$$

$$\Leftrightarrow (z_1 - z_2)(\overline{z}_1 - \overline{z}_2) = 2 \Leftrightarrow z_1\overline{z}_1 - z_1\overline{z}_2 - z_2\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 = 2$$

$$\Leftrightarrow 1 - z_1\overline{z}_2 - \overline{z}_1 z_2 + 1 = 2 \Leftrightarrow z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2 = 0 \quad (1)$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο το ζητούμενο μέτρο και χρησιμοποιούντες την παραπάνω σχέση (1) έχουμε διαδοχικά:

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2) = z_1\overline{z}_1 + z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 = 1 + z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2 + 1 = 2\,.$$

Άρα

$$|z_1 + z_2| = \sqrt{2}.$$

2η λύση

Συνεχίζοντας την σχέση (1) της πρώτης λύσης έχουμε διαδοχικά:

$$z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1 z_2=0 \Leftrightarrow 1+z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1 z_2+1=2 \Leftrightarrow z_1\overline{z}_1+z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1 z_2+z_2\overline{z}_2=2$$

$$\Leftrightarrow z_1(\overline{z}_1+\overline{z}_2)+z_2(\overline{z}_1+\overline{z}_2)=2 \Leftrightarrow (z_1+z_2)(\overline{z}_1+\overline{z}_2)=2 \Leftrightarrow$$

$$\left(z_1+z_2\right)\left(\overline{z_1+z_2}\right)=2 \Leftrightarrow \left|z_1+z_2\right|^2=2 \Leftrightarrow \left|z_1+z_2\right|=\sqrt{2}\,.$$

3η λύση

Λύνοντας ως προς z_2 την σχέση (1) της πρώτης λύσης παίρνουμε:

$$z_2=-\frac{z_1\overline{z}_2}{\overline{z}_1}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την παραπάνω σχέση έχουμε διαδοχικά:

$$\left|z_1+z_2\right|=\left|z_1-\frac{z_1\overline{z}_2}{\overline{z}_1}\right|=\left|\frac{z_1\overline{z}_1-z_1\overline{z}_2}{\overline{z}_1}\right|=\frac{\left|z_1\overline{z}_1-z_1\overline{z}_2\right|}{\left|\overline{z}_1\right|}=$$

$$\frac{\left|z_1\right|\left|\overline{z}_1-\overline{z}_2\right|}{\left|\overline{z}_1\right|}=\left|\overline{z}_1-\overline{z}_2\right|=\left|\overline{z_1-z_2}\right|=\left|z_1-z_2\right|=\sqrt{2}\,.$$

4η λύση

Συνεχίζοντας την σχέση (1) της πρώτης λύσης έχουμε διαδοχικά:

$$\mathrm{z}_1\overline{z}_2+\overline{z}_1 z_2=0 \Leftrightarrow \mathrm{z}_1\overline{z}_2=-\overline{z}_1 z_2 \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2}=-\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}=-\frac{\frac{1}{z_1}}{\frac{1}{z_2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2}=-\frac{z_2}{z_1} \Leftrightarrow z_1^2=-z_2^2 \Leftrightarrow z_1^2=(iz_2)^2$$

$$\Leftrightarrow z_1=iz_2 \quad \text{ή} \quad z_1=-iz_2\,.$$

Τώρα, αν $z_1=iz_2$ τότε έχουμε διαδοχικά:

$$|z_1 + z_2| = |iz_2 + z_2| = |1+i||z_2| = \sqrt{2}\,.$$

Όμοια και αν $z_1 = -iz_2$.

<u>5η λύση</u>

Συνεχίζοντας την σχέση (1) της πρώτης λύσης έχουμε διαδοχικά:

$$z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z_1 \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_1} z_2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{z_1^2 + z_2^2}{z_1 z_2} = 0 \;\Leftrightarrow\; z_1^2 + z_2^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow\; z_1^2 + 2z_1 z_2 + z_2^2 = 2z_1 z_2 \;\Leftrightarrow\; (z_1 + z_2)^2 = 2z_1 z_2.$$

Από την τελευταία ισότητα παίρνουμε:

$$|z_1 + z_2|^2 = 2|z_1||z_2| = 2$$

και τελικά

$$|z_1 + z_2| = \sqrt{2}\,.$$

<u>6η λύση</u>

Αρχικά αποδεικνύουμε την σχέση:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2,$$

η οποία στο σχολικό βιβλίο αναφέρεται ως άσκηση.

Να σημειωθεί ότι γεωμετρικά η σχέση αυτή συνδέει τα μήκη των πλευρών και των διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου και αποτελεί μερική περίπτωση του θεωρήματος Euler (δείτε την άσκηση 4 των Αποδεικτικών ασκήσεων στη σελίδα 198 του σχολικού βιβλίου της Γεωμετρίας).

Στη συνέχεια αν αντικαταστήσουμε τα γνωστά μέτρα στην παραπάνω σχέση προκύπτει ότι $|z_1 + z_2| = \sqrt{2}$.

7η λύση

(*Αναλυτικός τρόπος*) Θέτοντας $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$ έχουμε διαδοχικά:

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{2} \iff |(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i| = \sqrt{2} \iff (\alpha-\gamma)^2+(\beta-\delta)^2 = 2 \iff$$

$$\alpha^2 - 2\alpha\gamma + \gamma^2 + \beta^2 - 2\beta\delta + \delta^2 = 2 \iff \alpha^2+\gamma^2+\beta^2+\delta^2 - 2(\alpha\gamma+\beta\delta) = 2 \iff$$

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 - 2(\alpha\gamma+\beta\delta) = 2 \iff 1+1-2(\alpha\gamma+\beta\delta) = 2 \iff \alpha\gamma+\beta\delta = 0.$$

Στη συνέχεια λαμβάνοντας υπόψη την τελευταία ισότητα παίρνουμε:

$$\begin{aligned} |z_1+z_2| &= \sqrt{(\alpha+\gamma)^2+(\beta+\delta)^2} \\ &= \sqrt{\alpha^2+2\alpha\gamma+\gamma^2+\beta^2+2\beta\delta+\delta^2} \\ &= \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+2(\alpha\gamma+\beta\delta)} \\ &= \sqrt{1+1} \\ &= \sqrt{2}\,. \end{aligned}$$

8η λύση

(*Συνδυασμός μιγαδικής και αναλυτικής επεξεργασίας*)
Συνεχίζοντας την σχέση (1) της πρώτης λύσης παίρνουμε:

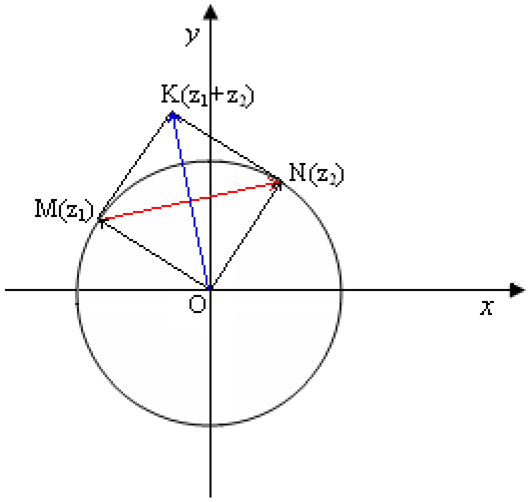
$$z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 0 \iff z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2} = 0 \iff z_1\bar{z}_2 = -\overline{z_1\bar{z}_2}\,.$$

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_1\bar{z}_2$ είναι φανταστικός.

Θέτοντας $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$ στην παράσταση $z_1\bar{z}_2$ και παίρνοντας το πραγματικό μέρος ίσον με μηδέν καταλήγουμε στη σχέση $\alpha\gamma + \beta\delta = 0$.
Η συνέχεια της λύσης είναι ακριβώς όπως το δεύτερο μέρος της προηγούμενης λύσης.

Β΄ Γεωμετρικές λύσεις

9η λύση



Έστω Μ και Ν οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 αντίστοιχα. Τα σημεία Μ και Ν προφανώς είναι πάνω στον μοναδιαίο κύκλο. Οι διανυσματικές ακτίνες $\overrightarrow{OM}$ και $\overrightarrow{ON}$ των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 είναι μεταξύ τους κάθετες. Αυτό προκύπτει από το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος, αφού ισχύει:

$$(OM)^2 + (ON)^2 = (MN)^2 \qquad (1 + 1 = 2).$$

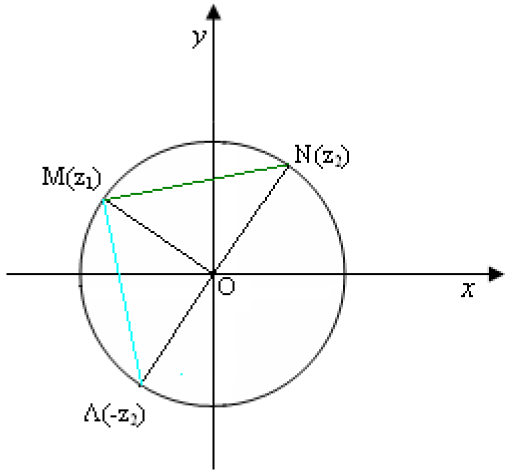
Σύμφωνα με τον κανόνα του παραλληλογράμμου η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος $z_1 + z_2$ των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 είναι το διάνυσμα $\overrightarrow{OK}$. Ακόμη, επειδή το παραλληλόγραμμο ΟΜΚΝ είναι τετράγωνο ισχύει (ΟΚ) = (ΜΝ), δηλαδή $\left|\overrightarrow{OK}\right| = \left|\overrightarrow{MN}\right|$.

Άρα

$$|z_1 + z_2| = \sqrt{2}\,.$$

Σημείωση: Στις 3 λύσεις που ακολουθούν η βασική σκέψη είναι ίδια. Γι' αυτό και χρησιμοποιούμε το ίδιο σχήμα . Η διαφορά βρίσκεται στον τρόπο εξαγωγής του συμπεράσματος. Επίσης, να σημειωθεί ότι στις δύο πρώτες λύσεις απαιτείται και η απόδειξη της καθετότητας των τμημάτων ΟΜ και ΟΝ, ενώ στην τρίτη όχι.

10η λύση



Το μέτρο $|z_1 + z_2|$ εκφράζει την απόσταση των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z_1 και $-z_2$, αφού ισχύει $|z_1 + z_2| = |z_1 - (-z_2)|$. Η εικόνα, έστω Λ, του μιγαδικού αριθμού $-z_2$ είναι το συμμετρικό σημείο του Ν ως προς το Ο και βρίσκεται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο.

Επειδή ισχύουν οι σχέσεις ΟΜ $\perp$ ΟΝ και ΟΝ = ΟΛ, έπεται ότι ο φορέας του τμήματος ΟΜ είναι η μεσοκάθετος του ΝΛ, οπότε ισχύει η ισότητα ΜΛ = ΜΝ.
Άρα

$$|z_1 + z_2| = (\text{ΜΛ}) = (\text{ΜΝ}) = \sqrt{2}\,.$$

11η λύση

Το τρίγωνο ΟΜΛ είναι ορθογώνιο, οπότε σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$(\text{ΜΛ})^2 = (\text{ΟΜ})^2 + (\text{ΟΛ})^2 = 1 + 1 = 2.$$

Άρα

$$|z_1 + z_2| = (\text{ΜΛ}) = \sqrt{2}\,.$$

12η λύση

Στο παραπάνω σχήμα τα σημεία Ν και Λ είναι αντιδιαμετρικά, οπότε η γωνία ΝΜΛ είναι ορθή επειδή βαίνει σε ημικύκλιο. Έτσι λοιπόν το τρίγωνο ΜΝΛ είναι ορθογώνιο, οπότε σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$(\text{ΜΝ})^2 + (\text{ΜΛ})^2 = (\text{ΝΛ})^2 \quad \Leftrightarrow \quad (\text{ΜΛ})^2 = (\text{ΝΛ})^2 - (\text{ΜΝ})^2\,.$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία ισότητα τις τιμές των (ΝΛ) και (ΜΝ) παίρνουμε:

$$(\text{ΜΛ})^2 = 2^2 - \sqrt{2}^2 = 4 - 2 = 2.$$

Άρα

$$|z_1 + z_2| = (\text{ΜΛ}) = \sqrt{2}\,.$$