Ισοδύναμες εξισώσεις και η έννοια του «κοντά»

Δρ. Παναγιώτης Λ. Θεοδωρόπουλος
Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03
ps.theodoropoulos@gmail.com

Πρόλογος

Στην εργασία αυτή αναλύονται οι έννοιες των ισοδύναμων εξισώσεων και του «κοντά» με αφορμή τις εκφωνήσεις δύο ασκήσεων, οι οποίες περιέχονται στο βιβλίο των Μαθηματικών Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου (έκδοση 2014) και μπορεί να προκαλέσουν κάποιον προβληματισμό στον αναγνώστη.

Α. Ισοδύναμες εξισώσεις

Διαβάζοντας κανείς την **άσκηση**[1]:

«*Να αποδείξετε ότι:*

i) *Η συνάρτηση* $f(x)=\dfrac{x^3-9x}{x^2-1}$ *είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της και να βρείτε το σύνολο τιμών της* f *σε καθένα από τα διαστήματα αυτά.*

ii) *Η εξίσωση* $x^3-\alpha x^2-9x+\alpha=0$ *είναι ισοδύναμη με την* $f(x)=\alpha$ *και στη συνέχεια ότι έχει τρεις πραγματικές ρίζες για κάθε* $\alpha\in IR$.»

ίσως προβληματιστεί και αναρωτηθεί:

Πώς είναι δυνατόν να είναι ισοδύναμες οι εξισώσεις που αναφέρονται στο ερώτημα ii, αφού δεν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού[2];

Είναι θέμα ορισμού. Ο ορισμός για την έννοια των ισοδύναμων εξισώσεων που κυριαρχεί στην βιβλιογραφία είναι:

[1] Είναι η άσκηση 5 της Β΄ ομάδας της § 2.6 του Β΄ μέρους στη σελίδα 257.

[2] Ως σχολικός σύμβουλος είχα δεχθεί από συναδέλφους αυτόν τον προβληματισμό.

Δύο ή περισσότερες εξισώσεις λέμε ότι είναι ισοδύναμες εάν και μόνον εάν έχουν την ίδια ή τις ίδιες λύσεις.

Δείτε, για παράδειγμα, την δημοσιευμένη εργασία σε περιοδικό της Ε.Μ.Ε. στην διεύθυνση: http://www.hdml.gr/pdfs/journals/1529.pdf .

Με αυτήν την έννοια οι εξισώσεις:

$$|2x - 3| = 3x - 2$$

(βιβλίο Άλγεβρας Α΄ Λυκείου (2014), § 3.1, σελ. 82) με πεδίο ορισμού το *IR* και η

$$\sqrt{2x+7} - x = 2$$

(βιβλίο Άλγεβρας Β΄ Λυκείου (2014), § 4.4, σελ. 151) με πεδίο ορισμού το διάστημα $\left[-\frac{7}{2},\ +\infty\right)$

είναι ισοδύναμες, αφού έχουν την ίδια ρίζα, που είναι ο αριθμός 1.

Σύμφωνα λοιπόν με τον παραπάνω ορισμό, όταν λέμε ότι δύο εξισώσεις είναι ισοδύναμες εννοούμε ότι έχουν την ίδια ή τις ίδιες ρίζες στο κοινό πεδίο ορισμού τους και καμία εξίσωση δεν έχει άλλη ρίζα στο πεδίο ορισμού της που δεν είναι κοινό. Γι' αυτό, για τη λύση της παραπάνω άσκησης πρέπει πρώτα να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $x^3 - \alpha x^2 - 9x + \alpha = 0$ δεν έχει ως ρίζες τους αριθμούς -1 και 1 και στη συνέχεια να προχωρήσουμε στην απόδειξη της ισοδυναμίας στο κοινό πεδίο ορισμού τους που είναι το $A = IR - \{-1, 1\}$.

<u>Όμως, όταν κατά την επίλυση των εξισώσεων μεταβαίνουμε από μια εξίσωση σε μια **ισοδύναμή** της χρησιμοποιώντας τον λογικό σύνδεσμο της ισοδυναμίας (⇔), τότε πρέπει υποχρεωτικά να εργαζόμαστε στο σύνολο στο οποίο ορίζονται και οι δύο οι εξισώσεις[3].</u>
Αυτό πρέπει να τηρείται, διότι για να ισχύει η σχέση της ισοδυναμίας θα πρέπει να ορίζονται και οι δύο οι εξισώσεις και κάθε τιμή του κοινού πεδίου ορισμού τους να επαληθεύει και τις δύο τις εξισώσεις ή καμία. Ο ισχυρισμός αυτός σύμφωνα με την Μαθηματική Λογική αιτιολογείται ως εξής:

Μία εξίσωση είναι ένας προτασιακός τύπος με κατηγόρημα τη σχέση της ισότητας και σύνολο αναφοράς το πεδίο ορισμού της εξίσωσης. Το σύνολο λύσεων της εξίσωσης είναι το σύνολο αλήθειας αυτού του προτασιακού τύπου. Έτσι λοιπόν αν p(x) και q(x) είναι οι προτασιακοί τύποι δύο ισοδύναμων εξισώσεων και η ισοδυναμία τους εκφράζεται με τον αντίστοιχο λογικό σύνδεσμο, τότε οι δύο προτασιακοί τύποι θα πρέπει να έχουν το ίδιο σύνολο αναφοράς (έστω Ω) και η τιμή αλήθειας της πρότασης[4] $(\forall x \in \Omega)\left[p(x) \leftrightarrow q(x)\right]$ *που δημιουργείται να είναι ίση με* 1.

[3] Αν το σύνολο αυτό είναι όλο το *IR*, τότε μπορεί να παραλείπεται αλλά θα εννοείται.
[4] Η έκφραση αυτή αποτελεί πρόταση, διότι δεν περιέχει ελεύθερη μεταβλητή. Μία μεταβλητή που είναι στην εμβέλεια ενός ποσοδείκτη δεν είναι ελεύθερη.

Αν με το σύμβολο || · || παριστάνουμε την τιμή αλήθειας μιας πρότασης, τότε η τιμή αλήθειας της παραπάνω πρότασης, η οποία περιέχει καθολικό ποσοδείκτη, ορίζεται ως εξής[5] :

$$\left\|(\forall x \in \Omega)\left[p(x) \leftrightarrow q(x)\right]\right\| = \bigwedge_{x_o \in \Omega} \left\|p(x_o) \leftrightarrow q(x_o)\right\|.$$

Αφού η τιμή αλήθειας της πρότασης $(\forall x \in \Omega)\left[p(x) \leftrightarrow q(x)\right]$ *είναι ίση με 1, θα ισχύει*:

$$\bigwedge_{x_o \in \Omega} \left\|p(x_o) \leftrightarrow q(x_o)\right\| = 1.$$

Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $x_o \in \Omega$ *οι προτάσεις* $p(x_o)$ *και* $q(x_o)$ *είναι και οι δύο αληθείς ή και οι δύο ψευδείς, δηλαδή έχουν την ίδια τιμή αλήθειας.*

Στη συνέχεια ας δούμε δύο παραδείγματα επίλυσης ισοδύναμων εξισώσεων που περιέχονται σε σχολικά βιβλία.

1. Σύμφωνα με τα παραπάνω, για να λύσουμε την εξίσωση $3\sigma\upsilon\nu x = \sqrt{3}\eta\mu x$ (βιβλίο Άλγεβρας της Β΄ Λυκείου, § 3.6, σελ. 94) με τη μέθοδο των ισοδύναμων εξισώσεων διαιρώντας και τα δύο μέλη με *συνx* πρώτα πρέπει να εξετάσουμε αν η εξίσωση αυτή μπορεί να έχει ως ρίζα κάποιον αριθμό *x* για τον οποίο ισχύει *συνx* = 0. Εύκολα αποδεικνύουμε ότι αυτό δεν ισχύει και συνεχίζουμε ως εξής:

Για κάθε πραγματικό αριθμό *x* για τον οποίο ισχύει $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$ έχουμε διαδοχικά:

$$3\sigma\upsilon\nu x = \sqrt{3}\eta\mu x \;\Leftrightarrow\; \varepsilon\varphi x = \sqrt{3} \quad \ldots$$

Δηλαδή, αφού χρησιμοποιούμε τον λογικό σύνδεσμο της ισοδυναμίας εργαζόμαστε στο σύνολο στο οποίο ορίζονται και οι δύο εξισώσεις, το οποίο αποτελεί το σύνολο αναφοράς της ισοδυναμίας αυτής. Όμως στο σχολικό βιβλίο της Άλγεβρας της Β΄ Λυκείου αυτό δεν αναφέρεται καθαρά και με σαφήνεια.

2. Πολύ σωστά στο βιβλίο της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου για την επίλυση της εξίσωσης:

$$|2x - 3| = 3x - 2$$

τίθεται αρχικά ο περιορισμός $3x - 2 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \geq \frac{2}{3}$, ώστε να έχει έννοια η ισοδυναμία:

$$|2x - 3| = 3x - 2 \;\Leftrightarrow\; (\, 2x - 3 = 3x - 2 \;\text{ ή }\; 2x - 3 = -3x + 2).$$

[5] Για να δείτε τον ορισμό της τιμής αλήθειας μιας πρότασης με καθολικό ποσοδείκτη μπορείτε να μεταβείτε στη σελίδα 17 της διδακτορικής μου διατριβής στην ηλεκτρονική διεύθυνση: http://users.sch.gr/PTheodoropoulos/ergasies/Didaktdiatr.pdf .

Δηλαδή, με τον περιορισμό δίνεται το σύνολο αναφοράς της παραπάνω ισοδυναμίας.

Β. Η έννοια του «κοντά»

Διαβάζοντας την **άσκηση**[6]:

«Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}$ *και οι ευθείες* ε_1: $y=-x-1$ *και* ε_2: $y=x+1$. *Να αποδείξετε ότι*

i) *Η* ε_1 *είναι ασύμπτωτη της* C_f *στο* $-\infty$, *ενώ η* ε_2 *είναι ασύμπτωτη της* C_f *στο* $+\infty$.

ii) *Για κάθε* $x \in IR$ *ισχύει* $x^2+2x+2>(x+1)^2 \geq 0$ *και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η* C_f *βρίσκεται πάνω από την* ε_1 *κοντά στο* $-\infty$ *και πάνω από την* ε_2 *κοντά στο* $+\infty$.»

αναρωτιόμαστε, τι νόημα έχουν οι φράσεις:

« *κοντά στο* -∞ » και **« *κοντά στο* +∞ » ;**

Μπορούμε να λέμε **κοντά στο άπειρο;**

Όταν λέμε ότι ένα αντικείμενο είναι κοντά σε ένα άλλο, εννοούμε ότι τα δύο αντικείμενα βρίσκονται σε μικρή απόσταση μεταξύ τους (δείτε λεξικό Μπαμπινιώτη). Εννοείται φυσικά ότι τα αντικείμενα αυτά είναι πολύ συγκεκριμένα και ο χώρος στον οποίον βρίσκονται επίσης συγκεκριμένος. Έτσι μπορούμε να λέμε κοντά σε έναν πραγματικό αριθμό x_o, διότι κάθε πραγματικός αριθμός είναι συγκεκριμένος, ενώ αντίθετα νομίζω ότι δεν μπορούμε να λέμε “κοντά στο άπειρο”, επειδή το άπειρο είναι μία ασαφής έννοια με δυναμικό χαρακτήρα.

Όταν λέμε ότι μία συνάρτηση f έχει μια ιδιότητα P κοντά σε έναν πραγματικό αριθμό x_o εννοούμε ότι: 1) αν η f ορίζεται εκατέρωθεν του x_o, τότε υπάρχει περιοχή U του x_o στην οποία ορίζεται η συνάρτηση f με εξαίρεση ίσως το σημείο x_o και η f έχει την ιδιότητα P στο σύνολο $U - \{ x_o \}$, 2) αν η f δεν ορίζεται εκατέρωθεν του x_o αλλά μόνο στη μία πλευρά, τότε έχουμε ανάλογο ορισμό. Δείτε σχολικό βιβλίο, σελίδα 163.
Ως παρατήρηση αναφέρω ότι ίσως θα ήταν καλύτερο για την απόδοση της παραπάνω έννοιας στο σχολικό βιβλίο να μην αναφερόταν σύνολο της μορφής $(\alpha, x_o)\cup(x_o, \beta)$, αλλά της μορφής $(x_o-\delta, x_o)\cup(x_o, x_o+\delta)$, διότι αυτό ταιριάζει στην δ-περιοχή του πραγματικού αριθμού x_o (δείτε πώς λειτουργεί η δ-περιοχή του x_o στην απόδειξη του θεωρήματος του Fermat στο σχολικό βιβλίο στη σελίδα 260). Αυτό, επειδή ο θετικός αριθμός δ, ο οποίος μπορεί να είναι όσο μικρός απαιτείται, νομίζω ότι υποβάλλει καλύτερα την έννοια του “κοντά”.

[6] Είναι η άσκηση 1 της Β΄ ομάδας της § 2.9 του Β΄ μέρους στη σελίδα 285.

Κλείνοντας κρίνω σκόπιμο να σημειώσω ότι το σημείο της άσκησης στο οποίο αναφέρεται ο παραπάνω προβληματισμός θα μπορούσε να διατυπωθεί ως εξής:

«*η* C_f *βρίσκεται πάνω από την* ε_1 *σε διάστημα της μορφής* $(-\infty, \alpha)$ *και πάνω από την* ε_2 *σε διάστημα της μορφής* $(\beta, +\infty)$, όπου $\alpha, \beta \in IR$ ».