Δύο ευθείες που ταυτίζονται θεωρούνται παράλληλες;

Δρ. Παναγιώτης Λ. Θεοδωρόπουλος
Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03
e-mail@p-theodoropoulos.gr

Στην Ευκλείδεια Γεωμετρία η έννοια της παραλληλίας δύο ευθειών αναφέρεται ρητά για διακεκριμένες ευθείες (δείτε Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου, σελ. 180 και βιβλίο Ευκλείδειας Γεωμετρίας Α΄ και Β΄ Λυκείου, § 4.1). Δηλαδή, στην Ευκλείδεια Γεωμετρία δύο ευθείες ενός επιπέδου λέγονται παράλληλες εάν δεν έχουν κοινό σημείο, οπότε δύο ευθείες που ταυτίζονται δεν θεωρούνται παράλληλες.

Χαρακτηριστικός είναι ο ορισμός της έννοιας της παραλληλίας δύο ευθειών ενός επιπέδου που έδωσε ο ίδιος ο *Ευκλείδης* και αποτελεί τον 23^{ο} όρο (κγ΄) του πρώτου βιβλίου (*βιβλίο* Α΄) των "*Στοιχείων*" και είναι ο εξής:

κγ΄. Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

Στην Αναλυτική Γεωμετρία[1], όμως, που διδάσκεται στην Β΄ Λυκείου στα Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης, η έννοια της παραλληλίας επεκτείνεται και στην περίπτωση που οι ευθείες ταυτίζονται. Χαρακτηριστική είναι και η άσκηση 1 της Α΄ ομάδας στη σελίδα 69 του σχολικού βιβλίου στην οποία ζητούνται οι τιμές της παραμέτρου μ ώστε η ευθεία:

$$(\mu - 1)x + \mu y + \mu^2 = 0$$

να είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ και δίνεται ως λύση η τιμή $\mu = 0$, η οποία οδηγεί στον ίδιο τον άξονα $y'y$.

Το ίδιο πνεύμα ακολουθείται και στην Γ΄ Λυκείου, αν κρίνουμε από την άσκηση 3 της Β΄ ομάδας στη σελίδα 38 του βιβλίου των Μαθηματικών της Γενικής Παιδείας, όπου ζητούνται τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

στα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στην διχοτόμο της πρώτης και τρίτης γωνίας και δίνεται ως μία λύση το σημείο Ο(0, 0) στο οποίο η εφαπτομένη είναι η ίδια η διχοτόμος, δηλαδή η ευθεία $y = x$.

Στην Αναλυτική Γεωμετρία όπου υπεισέρχεται η έννοια της *διεύθυνσης* μιας ευθείας, η παραπάνω επέκταση θεωρώ πως επιβάλλεται, διότι έτσι η σχέση της παραλληλίας στο σύνολο των ευθειών (Ε) ενός επιπέδου είναι μία σχέση ισοδυναμίας, η οποία διαμερίζει το σύνολο (Ε) των ευθειών του επιπέδου αυτού σε κλάσεις ισοδυναμίας όπου η κάθε κλάση ορίζει και μία διεύθυνση.

---

[1] Εδώ εννοούμε την *Αναλυτική Γεωμετρία* στην οποία χρησιμοποιείται το ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με την βοήθεια της οποίας αναπτύσσεται με αλγεβρικό τρόπο η *Ευκλείδεια Γεωμετρία*.

Συμβολικά, αν με $\parallel_{\text{ΑΓ}}$ συμβολίσουμε την σχέση της παραλληλίας δύο ευθειών ε_1 και ε_2 ενός επιπέδου στην Αναλυτική Γεωμετρία και με $\parallel_{\text{ΕΓ}}$ την σχέση της παραλληλίας στην Ευκλείδεια Γεωμετρία, τότε έχουμε:

$$\varepsilon_1 \parallel_{\text{ΑΓ}} \varepsilon_2 \Leftrightarrow (\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2 \text{ ή } \varepsilon_1 \parallel_{\text{ΕΓ}} \varepsilon_2)\,.$$

Αποδεικνύεται ότι η σχέση $\parallel_{\text{ΑΓ}}$ είναι μία *σχέση ισοδυναμίας* στο σύνολο των ευθειών (Ε) ενός επιπέδου, δηλαδή ότι έχει τις ιδιότητες *ανακλαστική*, *συμμετρική* και *μεταβατική*. Κάθε *κλάση ισοδυναμίας* του συνόλου πηλίκου $\text{Ε}\,/\,\parallel_{\text{ΑΓ}}$ αποτελεί μία *διεύθυνση*. Έτσι λοιπόν, με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να ορίσουμε την έννοια της διεύθυνσης μιας ευθείας στην Αναλυτική Γεωμετρία.

Κατά την διδασκαλία των αντίστοιχων ενοτήτων (διανύσματα – ευθείες) στους μαθητές της Θετικής Κατεύθυνσης στην Β΄ Λυκείου ίσως δημιουργηθεί κάποιο επιστημολογικό εμπόδιο, αφού έως και την Α΄ Λυκείου οι μαθητές γνώριζαν ότι δύο ευθείες ενός επιπέδου λέγονται παράλληλες εάν δεν έχουν κοινό σημείο. Για την υπερπήδηση του εμποδίου αυτού θα πρέπει να τονιστεί στους μαθητές ότι στον Διανυσματικό Λογισμό και στην Αναλυτική Γεωμετρία γίνεται επέκταση της έννοιας της παραλληλίας και στην περίπτωση που οι ευθείες ταυτίζονται επισημαίνοντας ταυτόχρονα ότι η έννοια της *παραλληλίας* στον Διανυσματικό Λογισμό και στην Αναλυτική Γεωμετρία ταυτίζεται με τον όρο "*ίδια διεύθυνση*".

Κλείνοντας, αξίζει να αναφερθεί ότι για την θεμελίωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας προκειμένου να βελτιωθεί το αξιωματικό σύστημα του Ευκλείδη, το οποίο παρουσιάζει κάποια κενά, έχουν προταθεί διάφορα αξιωματικά συστήματα, όπως του Peano, του Hilbert, του H. Weyl και άλλων, χωρίς βέβαια να αμφισβητείται η μεγάλη προσφορά του Ευκλείδη. Στο αξιωματικό σύστημα του H. Weyl η έννοια του διανύσματος θεωρείται πρωταρχική και η σχέση της παραλληλίας δύο ευθειών ενός επιπέδου επεκτείνεται και στην περίπτωση που οι ευθείες ταυτίζονται.