Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_o και η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_o)$, τότε η fog είναι παραγωγίσιμη στο x_o ;

Δρ. Παναγιώτης Λ. Θεοδωρόπουλος
Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03
e-mail@p-theodoropoulos.gr

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου στην § 2.3 του Β΄ Μέρους (σελ. 234) αναφέρεται το παρακάτω θεώρημα:

"*Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_o και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_o)$, τότε η συνάρτηση fog είναι παραγωγίσιμη στο x_o και ισχύει*

$$\left(fog\right)'(x_o) = f'(g(x_o))\cdot g'(x_o)\text{''}.$$

Από την Μαθηματική Λογική είναι γνωστό ότι αν μία πρόταση p συνεπάγεται μία πρόταση q, τότε η άρνηση της p δεν συνεπάγεται κατ' ανάγκη την άρνηση της q.

Έτσι λοιπόν αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_o και η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_o)$, τότε η συνάρτηση fog μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_o μπορεί όμως και να μην είναι. Αυτό φαίνεται καθαρά στα δύο παραδείγματα που ακολουθούν.

<u>Παράδειγμα 1</u>: Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$g(x) = -1{,}25 + 0{,}01(2x-1)^3$$

και $f(x) = |x|$.

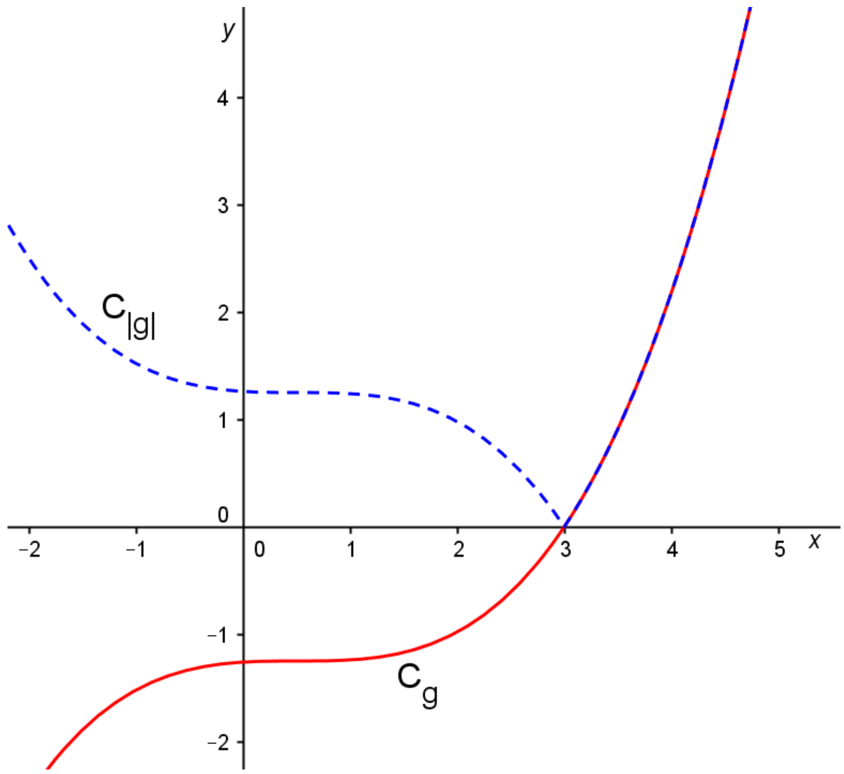
Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = |x|$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$. Λύνοντας την εξίσωση $g(x) = 0$ βρίσκουμε ότι έχει μοναδική ρίζα την $x_o = 3$. Επίσης, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη και βρίσκουμε ότι η παράγωγός της στο σημείο $x_o = 3$ είναι $g'(3) = 1{,}5$.

Έτσι λοιπόν έχουμε:

- η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 3$ με $g'(3) = 1{,}5$
- η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $g(3) = 0$

και αποδεικνύεται ότι η $(fog)(x) = |g(x)|$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 3$.

Γραφικά αυτό φαίνεται στο επόμενο σχήμα στο οποίο εμφανίζονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και $fog = |g|$ όπου φαίνεται ότι η γραφική παράσταση της $fog = |g|$ στο $x_o = 3$ δεν είναι λεία, αλλά σχηματίζει γωνία.



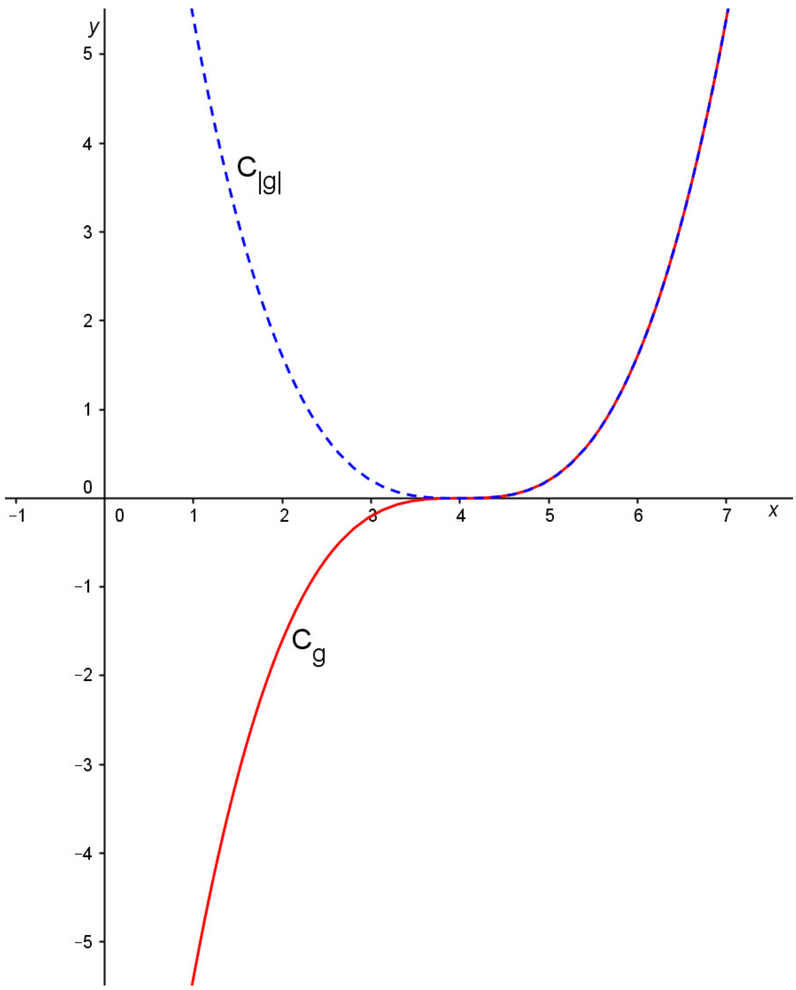
<u>Παράδειγμα 2</u>: Θεωρούμε τώρα τις συναρτήσεις:

$$g(x) = 0{,}02(x\text{-}4)^3$$

και $f(x) = |x|$.

Είναι προφανές ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 4$ με $g'(4) = 0$. Επίσης, αφού η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$ συνεπάγεται ότι δεν είναι παραγωγίσιμη στο $g(4) = 0$.
Αποδεικνύεται όμως ότι η συνάρτηση $(fog)(x) = |g(x)|$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 4$ με $\left(fog\right)'(4) = 0$.

Γραφικά αυτό φαίνεται στο επόμενο σχήμα στο οποίο βλέπουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $(fog)(x) = |g(x)|$ στο σημείο $x_o =$ 4 είναι λεία και έχει εφαπτομένη τον άξονα $x'x$.



Γενικά αποδεικνύεται ότι αν για μία συνάρτηση g σε ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της ισχύει $g(x_o)=0$ και η g είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_o, τότε η συνάρτηση $|g|$ είναι παραγωγίσιμη στο x_o εάν και μόνον εάν ισχύει $g'(x_o)=0$.