ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ 7ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ
(θετικοί & αρνητικοί αριθμοί)

7.1

Πρόσημα λέγονται τα σύμβολα $+$ (συν) και $-$ (μείον ή πλην) και τα γράφουμε πριν από τους αριθμούς εκτός του μηδενός.

Θετικός λέγεται ένας αριθμός όταν έχει πρόσημο $+$, π.χ $+19$

Αρνητικός λέγεται ένας αριθμός όταν έχει πρόσημο $-$, π.χ -7

Το **0** δεν είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός αριθμός.

Σε έναν θετικό αριθμό μπορούμε να παραλείψουμε το πρόσημο $+$, π.χ αντί $+6$ γράφουμε 6, δηλαδή όταν γράφουμε 6 εννοούμε τον θετικό αριθμό $+6$.

Ομόσημοι λέγονται οι αριθμοί που έχουν το ίδιο πρόσημο.
π.χ οι αριθμοί: $+5,\quad +9,\quad +\frac{5}{6},\quad +2.7$ είναι ομόσημοι, επίσης οι αριθμοί:
$-3,\quad -\frac{3}{5},\quad -3.2$ είναι ομόσημοι.

Ετερόσημοι λέγονται δύο αριθμοί που έχουν διαφορετικό πρόσημο, δηλαδή ο ένας είναι θετικός και ο άλλος αρνητικός. π.χ οι αριθμοί: $+7,\quad -5$ είναι ετερόσημοι.

Σύνολα Αριθμών

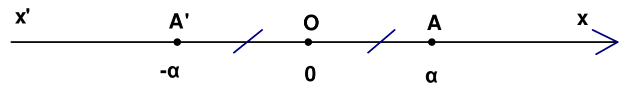
Φυσικοί αριθμοί είναι οι αριθμοί
$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., 99, 100, 101, ..., 1499, 1500, 1501, ...$

Ακέραιοι αριθμοί είναι οι φυσικοί αριθμοί μαζί με τους αντίστοιχους αρνητικούς.
Δηλ. οι αριθμοί: $..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...$

Ρητοί αριθμοί είναι οι φυσικοί αριθμοί, τα κλάσματα και οι δεκαδικοί μαζί με τους αντίστοιχους αρνητικούς.
Οι φυσικοί αριθμοί περιέχονται στους ακεραίους και οι ακέραιοι στους ρητούς.

Παράσταση των ρητών αριθμών με σημεία του άξονα

Έστω ο ημιάξονας $\mathbf{Ox}$ και ο αντικείμενός του $\mathbf{Ox'}$, οπότε λέμε ότι έχουμε τον **άξονα** $\mathbf{x'x}$:



Αν ο θετικός αριθμός $\mathbf{\alpha}$ αντιστοιχίζεται στο σημείο $\mathbf{A}$, ο αριθμός $-\mathbf{\alpha}$ αντιστοιχίζεται στο συμμετρικό σημείο $\mathbf{A'}$ του $\mathbf{A}$ ως προς το $\mathbf{O}$.
Οπότε έχουμε τον άξονα $\mathbf{x'x}$ των ρητών. Δεξιά του 0 είναι οι θετικοί αριθμοί και αριστερά του οι αρνητικοί.
Ο ημιάξονας $\mathbf{Ox}$ λέγεται **θετικός ημιάξονας**. Ο ημιάξονας $\mathbf{Ox'}$ λέγεται **αρνητικός ημιάξονας**.

(Υπάρχουν σημεία του άξονα $\mathbf{x'x}$ που δεν αντιστοιχίζονται σε ρητούς αριθμούς. Αν ένα σημείο $\mathbf{A}$ του άξονα $\mathbf{x'x}$ αντιστοιχίζεται σ' έναν αριθμό $\mathbf{\alpha}$, τότε ο αριθμός $\mathbf{\alpha}$ λέγεται **τετμημένη** του σημείου $\mathbf{A}$)

7.2

Η Απόλυτη Τιμή ενός ρητού αριθμού $\mathbf{\alpha}$ εκφράζει την απόσταση του σημείου με τετμημένη $\mathbf{\alpha}$ από την αρχή $\mathbf{O}$ του άξονα και συμβολίζεται με $|\mathbf{\alpha}|$.

Αντίθετοι Αριθμοί ονομάζονται δύο αριθμοί που είναι ετερόσημοι και έχουν ίδια απόλυτη τιμή.
Ο **αντίθετος** του 0 είναι το 0.
π.χ
Οι αριθμοί $+4$ και -4 είναι αντίθετοι, διότι είναι ετερόσημοι και $|+4| = |-4|$.
Λέμε ότι αριθμός -4 είναι ο αντίθετος του $+4$ ή ότι αριθμός $+4$ είναι ο αντίθετος του -4.

***Γενικά*:**
Ο αντίθετος του x είναι ο $-\mathrm{x}$ και ισχύει $|-\mathrm{x}| = |+\mathrm{x}|$.

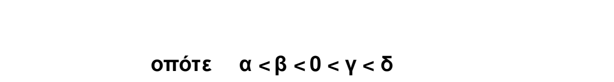
Η απόλυτη τιμή ενός θετικού αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός: π.χ $|+6| = +6$.

Η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετός του: π.χ $|-6| = +6$.

Η απόλυτη τιμή του 0 είναι το μηδέν, δηλ. $|0| = 0$.

Ηαπόλυτη τιμή οποιουδήποτε ρητού αριθμού είναι **πάντα** μη-αρνητικός αριθμός, δηλαδή θετικός ή μηδέν (μηδέν είναι μόνο η απόλυτη τιμή του μηδενός).

Σύγκριση Ρητών
Μεγαλύτερος από δύο ρητούς αριθμούς είναι εκείνος που βρίσκεται δεξιότερα από τον άλλο στον άξονα.



οπότε $\alpha < \beta < 0 < \gamma < \delta$

7.3

Πρόσθεση Ομόσημων Αριθμών

Για να προσθέσουμε δύο ή περισσότερους **ομόσημους** ρητούς αριθμούς, προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμα βάζουμε το πρόσημό τους.

π.χ $(+4)+(+3)=+(|+4|+|+3|)=+(4+3)=+7$

Πρόσθεση Ετερόσημων Αριθμών

Για να προσθέσουμε **δύο ετερόσημους** ρητούς αριθμούς, αφαιρούμε από τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή τη μικρότερη και στη διαφορά βάζουμε το πρόσημο του ρητού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

π.χ $(-4)+(+3)=-(|-4|-|+3|)=-(4-3)=-1$,

π.χ $(+4)+(-3)=+(|4|-|-3|)=+(4-3)=+1$.

Ιδιότητες της Πρόσθεσης

$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$ (αντιμεταθετική)

$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$ (προσεταιριστική)

$\boldsymbol{\alpha}+0=0+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$ (ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης το 0)

$\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=(-\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\alpha}=0$ (άθροισμα δύο αντίθετων είναι το 0)

7.4

Αφαίρεση Ρητών Αριθμών

Για να αφαιρέσουμε από τον αριθμό $\boldsymbol{\alpha}$ τον αριθμό $\boldsymbol{\beta}$, προσθέτουμε στον $\boldsymbol{\alpha}$ τον αντίθετο του $\boldsymbol{\beta}$.

Δηλ. $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta})$.

π.χ $(+5)-(+2)=(+5)+(-2)=+3$, π.χ $(-5)-(+3)=(-5)+(-3)=-8$.

7.5

Πρόσημο Γινομένου Ρητών Αριθμών

Το γινόμενο δύο ομόσημων αριθμών είναι θετικός αριθμός.

Δηλ. αν $\boldsymbol{\alpha}>0$ **και** $\boldsymbol{\beta}>0$, **τότε** $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}>0$,

αν $\boldsymbol{\alpha}<0$ **και** $\boldsymbol{\beta}<0$, **τότε** $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}>0$.

Το γινόμενο δύο ετερόσημων αριθμών είναι αρνητικός αριθμός.

Δηλ. αν $\boldsymbol{\alpha}>0$ **και** $\boldsymbol{\beta}<0$, **τότε** $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}<0$.

Ιδιότητες του Πολλαπλασιασμού

$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha}$ (αντιμεταθετική)

$(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\gamma})$ (προσεταιριστική)

$\boldsymbol{\alpha}\cdot 1=1\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$ (ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού το 1)

$\boldsymbol{\alpha}\cdot 0=0\cdot\boldsymbol{\alpha}=0$

$\boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\gamma}$ (επιμεριστική)

Παρατηρήσεις

Δύο ρητοί αριθμοί $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$ λέγονται **αντίστροφοι**, όταν $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=1$. Οι αντίστροφοι αριθμοί είναι ομόσημοι.

Πολλαπλασιασμός Ρητών

Για να πολλαπλασιάσουμε δύο **ομόσημους** ρητούς αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε το πρόσημο $+$.
π.χ $(+5)\cdot(+2)=+10$, π.χ $(-5)\cdot(-2)=+10$.

Για να πολλαπλασιάσουμε δύο **ετερόσημους** ρητούς αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε το πρόσημο $-$.
π.χ $(+5)\cdot(-2)=-10$, π.χ $(-5)\cdot(+2)=-10$.

Για να υπολογίσουμε το γινόμενο πολλών παραγόντων (που κανένας δεν είναι μηδέν), πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε: το πρόσημο $+$ αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι **άρτιο** ή το πρόσημο $-$ αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι **περιττό**.

7.6

Διαίρεση Ρητών

Για να **διαιρέσουμε** δυο ρητούς αριθμούς, διαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους και στο πηλίκο βάζουμε:
το πρόσημο $+$, αν είναι ομόσημοι.
π.χ $(+20):(+5)=+4$, π.χ $(-8):(-4)=+2$
το πρόσημο $-$, αν είναι ετερόσημοι.
π.χ $(-20):(+5)=-4$, π.χ $(+8):(-4)=-2$
(Διαίρεση με διαιρέτη το 0 δεν ορίζεται, γι’αυτό και σε ένα κλάσμα ο παρονομαστής πρέπει πάντα να είναι διαφορετικός από το 0.)

7.7

Αν ένας ρητός είναι ακέραιος, τότε προφανώς γράφεται ως δεκαδικός. π.χ $7 = \frac{7}{1}$

Αν ένας ρητός είναι κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ ($\frac{\alpha}{\beta}$ ανάγωγο κλάσμα), τότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1ο. αν ο παρονομαστής του κλάσματος γράφεται ως γινόμενο δυνάμεων του 2 και του 5, τότε ο ρητός $\frac{\alpha}{\beta}$ γράφεται ως δεκαδικός, π.χ $\frac{13}{40} = 0.325$.

2ο. αν ο παρονομαστής δε γράφεται ως γινόμενο δυνάμεων του 2 και του 5, τότε ο ρητός αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ δε γράφεται ως δεκαδικός (με πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων).

π.χ $\frac{1}{3} = 0{,}3333333...$, όπου το ψηφίο 3 επαναλαμβάνεται ατελείωτα. Ο αριθμός $0{,}3333333...$ λέγεται **περιοδικός δεκαδικός με περίοδο** το 3 και γράφεται συμβολικά $0{,}\overline{3}$.

π.χ $\frac{150}{88} = 1{,}704545454545...$, όπου το 45 επαναλαμβάνεται ατελείωτα. Ο αριθμός $1{,}704545454545...$ λέγεται **περιοδικός δεκαδικός με περίοδο** το 45 και γράφεται συμβολικά $1{,}70\overline{45}$.

(Ένας περιοδικός αριθμός λέγεται απλός περιοδικός, όταν η περίοδος ξεκινά μετά την υποδιαστολή, διαφορετικά λέγεται μικτός περιοδικός.)

Κάθε **ρητός** αριθμός μπορεί να έχει τη μορφή **δεκαδικού** ή **περιοδικού δεκαδικού** αριθμού. Επίσης κάθε δεκαδικός ή περιοδικός δεκαδικός αριθμός μπορεί να γραφεί ως ρητός με κλασματική μορφή.
Οπότε το σύνολο των ρητών αποτελείται από τους δεκαδικούς και τους περιοδικούς δεκαδικούς αριθμούς.

Για να γράψουμε έναν περιοδικό δεκαδικό αριθμό σε κλασματική μορφή κάνουμε τα εξής βήματα:

1ο. Θέτουμε τον περιοδικό δεκαδικό αριθμό α με x δηλ. $x = \alpha$ (1).
2ο. Αν ο x είναι μικτός, πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (1) με κατάλληλη δύναμη του 10, ώστε ο μικτός να γίνει απλός περιοδικός.
3ο. Αν ο x είναι απλός, πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη της (1) με μια δύναμη του 10, που έχει εκθέτη όσα τα ψηφία της περιόδου.
4ο. Γράφουμε το 2ο μέλος ως άθροισμα ενός φυσικού και ενός άλλου που εκφράζεται με τη βοήθεια του x.
5ο. Λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει.

<u>π.χ</u> Να γράψετε σε κλασματική μορφή τους δεκαδικούς περιοδικούς αριθμούς: $0,\overline{3}$ και $1,\overline{25}$.

Είναι: **α)**

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= 0,\overline{3} \\ \mathbf{x} &= 0,333\ldots \\ 10\mathbf{x} &= 3,333\ldots \\ 10\mathbf{x} &= 3+0,333 \\ 10\mathbf{x} &= 3+\mathbf{x} \\ 10\mathbf{x}-\mathbf{x} &= 3 \\ 9\mathbf{x} &= 3 \\ \mathbf{x} &= \frac{3}{9} \\ \mathbf{x} &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

β)

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= 1,\overline{25} \\ \mathbf{x} &= 1,2525\ldots \\ 100\mathbf{x} &= 125,2525\ldots \\ 100\mathbf{x} &= 124+1,2525\ldots \\ 100\mathbf{x} &= 124+\mathbf{x} \\ 100\mathbf{x}-\mathbf{x} &= 124 \\ 99\mathbf{x} &= 124 \\ \mathbf{x} &= \frac{124}{99} \end{aligned}$$

<u>7.8</u>

Δύναμη με βάση ένα ρητό αριθμό $\boldsymbol{\alpha}$ και εκθέτη φυσικό αριθμό $\boldsymbol{\nu} \geq 2$ που συμβολίζεται με $\boldsymbol{\alpha}^{\nu}$ (διαβάζεται $\boldsymbol{\alpha}$ στη νιοστή), λέμε το γινόμενο $\boldsymbol{\nu}$ παραγόντων ίσων με τον αριθμό $\boldsymbol{\alpha}$.

Δηλ. $\boldsymbol{\alpha}^{\nu} = \underbrace{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}\cdot\ldots\cdot\boldsymbol{\alpha}}_{\nu \text{ παράγοντες}}$.

Ορίζουμε ακόμη $\boldsymbol{\alpha}^{1} = \boldsymbol{\alpha}$.

Επειδή ο εκθέτης σε μια δύναμη δηλώνει το πλήθος των παραγόντων, έχουμε ότι:

1ο. Αν $\boldsymbol{\alpha} > 0$, τότε $\boldsymbol{\alpha}^{\nu} > 0$

2ο. Αν $\boldsymbol{\alpha} < 0$, τότε διακρίνουμε περιπτώσεις:

- **i.** Αν ο $\boldsymbol{\nu}$ είναι άρτιος, τότε $\boldsymbol{\alpha}^{\nu} > 0$
- **ii.** Αν ο $\boldsymbol{\nu}$ είναι περιττός, τότε $\boldsymbol{\alpha}^{\nu} < 0$.

Ιδιότητες δυνάμεων ρητών με εκθέτη φυσικό

1. $\alpha^{\mu}\cdot\alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$
2. $\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$
3. $(\alpha\cdot\beta)^{\nu} = \alpha^{\nu}\cdot\beta^{\nu}$
4. $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} = \frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}$
5. $(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\cdot\nu}$

7.9

Για κάθε αριθμό $\boldsymbol{\alpha}$ με $\boldsymbol{\alpha} \neq 0$ έχουμε ότι: $\boxed{\boldsymbol{\alpha}^0 = 1}$.

π.χ $5^0 = 1,\quad \left(\frac{2}{5}\right)^0 = 1,\quad (-35)^0 = 1,\quad -7^0 = -1$.

Η δύναμη κάθε αριθμού διαφόρου του μηδενός με εκθέτη αρνητικό είναι ίση με ένα κλάσμα που έχει αριθμητή τη μονάδα και παρονομαστή τη δύναμη του αριθμού αυτού με αντίθετο εκθέτη δηλαδή $\boxed{\boldsymbol{\alpha}^{-\nu} = \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}^{\nu}} = \left(\frac{1}{\boldsymbol{\alpha}}\right)^{\nu}}$, επίσης έχουμε ότι: $\boxed{\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\alpha}}\right)^{\nu}}$.

Οι ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη φυσικό ισχύουν και για τις δυνάμεις με εκθέτη ακέραιο.

7.10

Τυποποιημένη μορφή μεγάλων και μικρών αριθμών

Οι πολύ μεγάλοι αριθμοί μπορούν να γραφούν σε τυποποιημένη μορφή και συγκεκριμένα στη μορφή: $\boldsymbol{\alpha} \cdot 10^{\nu}$ όπου ο $\boldsymbol{\alpha}$ είναι ένας δεκαδικός αριθμός με $1 \leq \boldsymbol{\alpha} \leq 10$ και ο $\boldsymbol{\nu}$ φυσικός αριθμός.

Οι πολύ μικροί θετικοί αριθμοί μπορούν να γραφούν σε τυποποιημένη μορφή και συγκεκριμένα στη μορφή $\boldsymbol{\alpha} \cdot 10^{-\nu}$ όπου ο $\boldsymbol{\alpha}$ είναι ένας δεκαδικός αριθμός με $1 \leq \boldsymbol{\alpha} \leq 10$ και ο $\boldsymbol{\nu}$ φυσικός αριθμός.

π.χ $7.000.000.000.000.000 = 7 \cdot 10^{15}$ π.χ $625.000.000.000.000 = 6{,}25 \cdot 10^{14}$

π.χ $0{,}0000000000005 = 5 \cdot 10^{-13}$ π.χ $0{,}000000037 = 3{,}7 \cdot 10^{-8}$