ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ

27η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα

"Ο Αρχιμήδης"

ΣΑΒΒΑΤΟ, 27 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2010

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να προσδιορίσετε το πλήθος των θετικών ακέραιων που δεν είναι δυνατόν να γραφούν στη μορφή $80\kappa+3\lambda$, όπου $\kappa,\lambda\in\mathbb{N}=\{0,1,2,\ldots\}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές $\mathrm{AB}=\alpha$ και $\mathrm{B\Gamma}=\beta$. Έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ προς το μέρος του Α κατά τμήμα $\mathrm{AE}=\mathrm{AO}$ και την διαγώνιο ΔΒ προς το μέρος του Β κατά τμήμα $\mathrm{BZ}=\mathrm{BO}$. Αν το τρίγωνο ΕΖΓ είναι ισόπλευρο, τότε να αποδείξετε ότι:

(i) $\beta=\alpha\sqrt{3}$, **(ii)** $\mathrm{AZ}=\mathrm{EO}$, **(iii)** $\mathrm{EO}\perp\mathrm{Z\Delta}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Αν a,b είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 3 και οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί x,y και z έχουν γινόμενο 1, να αποδείξετε ότι:

$$(ax+b)(ay+b)(az+b)\geq 27.$$

Για ποιες τιμές των x,y και z αληθεύει η ισότητα;

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνονται τρεις παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ και ε_3 ενός επιπέδου έτσι ώστε η ευθεία ε_2 να έχει την ίδια απόσταση α από τις ε_1 και ε_3. Τοποθετούμε 5 σημεία $\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2,\mathrm{M}_3,\mathrm{M}_4$ και M_5 πάνω στις ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ και ε_3, έτσι ώστε σε κάθε ευθεία να υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο. Να προσδιορίσετε το μέγιστο αριθμό ισοσκελών τριγώνων που είναι δυνατό να σχηματιστούν με κορυφές τρία από τα σημεία $\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2,\mathrm{M}_3,\mathrm{M}_4$ και M_5 με κατάλληλη τοποθέτησή τους πάνω στις ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ και ε_3, σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

(α) $\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2,\mathrm{M}_3\in\varepsilon_2$, $\mathrm{M}_4\in\varepsilon_1$ και $\mathrm{M}_5\in\varepsilon_3$.

(β) $\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2\in\varepsilon_1$, $\mathrm{M}_3,\mathrm{M}_4\in\varepsilon_3$ και $\mathrm{M}_5\in\varepsilon_2$.

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες και 30 λεπτά
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
27η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"

ΣΑΒΒΑΤΟ, 27 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2010

Θέματα μεγάλων τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να προσδιορίσετε τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης

$$x^4 - 6x^2 + 1 = 7 \cdot 2^y .$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί x και y έχουν άθροισμα 2α, όπου $\alpha > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$x^3 y^3 \left(x^2 + y^2\right)^2 \leq 4\alpha^{10}. \qquad (1)$$

Για ποιες τιμές των x και y αληθεύει η ισότητα;

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Δίνεται τρίγωνο ABC εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) και έστω I το έκκεντρό του. Οι προεκτάσεις των AI, BI και CI τέμνουν το περιγεγραμμένο κύκλο στα σημεία D, E και F αντίστοιχα. Οι κύκλοι με διάμετρο ID, IE και IF τέμνουν τις πλευρές BC, AC και AB στα σημεία A_1, A_2, B_1, B_2 και C_1, C_2 αντίστοιχα.

Να αποδείξτε ότι τα σημεία $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ είναι ομοκυκλικά.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Στο επίπεδο θεωρούμε $k+n$ διαφορετικές μεταξύ τους ευθείες, όπου k ακέραιος με $k>1$ και n θετικός ακέραιος, οι οποίες ανά τρεις δεν περνάνε από το ίδιο σημείο. Από τις ευθείες αυτές, k είναι παράλληλες μεταξύ τους ενώ οι υπόλοιπες n τέμνονται ανά δύο και δεν υπάρχει κάποια από αυτές που να είναι παράλληλη με τις k παράλληλες ευθείες. Όλες οι παραπάνω ευθείες τεμνόμενες διαμερίζουν το επίπεδο σε χωρία (π. χ τριγωνικά, πολυγωνικά και μη φραγμένα). Δύο χωρία θεωρούνται διαφορετικά, αν δεν έχουν κοινά σημεία ή αν έχουν κοινά σημεία μόνο στο σύνορό τους. Ένα χωρίο θα το ονομάζουμε "*καλό*" όταν βρίσκεται ανάμεσα στις παράλληλες ευθείες. Αν σε ένα σχηματισμό, το ελάχιστο πλήθος των "*καλών*" χωρίων είναι 176 και το μέγιστο πλήθος τους είναι 221, να βρεθούν τα k, n.

Διάρκεια εξέτασης 4 ώρες .
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Καλή επιτυχία!