



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
27^η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 27 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2010

Ενδεικτικές λύσεις
θεμάτων μικρών τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να προσδιορίσετε το πλήθος των θετικών ακέραιων που δεν είναι δυνατόν να γραφούν στη μορφή $80κ + 3λ$, όπου $κ, λ \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Λύση

Θεωρούμε τους αριθμούς της μορφής $80κ + 3λ$, όπου $κ, λ \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, σταθεροποιώντας την τιμή του $κ$.

Για $κ = 0$ λαμβάνουμε όλα τα πολλαπλάσια του 3 αρχίζοντας από το 0.

Για $κ = 1$ λαμβάνουμε τους αριθμούς

$$A = 80 + 3λ = 3(26 + λ) + 2 = 3ρ + 2, \rho \geq 26,$$

δηλαδή όλους τους αριθμούς που διαιρούμενοι με το 3 δίνουν υπόλοιπο 2, εκτός από τους 26 συνολικά αριθμούς της μορφής $3ρ + 2$, για $ρ = 0, 1, 2, \dots, 25$.

Για $κ = 2$ λαμβάνουμε τους αριθμούς

$$A = 160 + 3λ = 3(53 + λ) + 1 = 3ρ + 1, \rho \geq 53,$$

δηλαδή όλους τους αριθμούς που διαιρούμενοι με το 3 δίνουν υπόλοιπο 2, εκτός από τους 53 συνολικά αριθμούς της μορφής $3ρ + 1$, για $ρ = 0, 1, 2, \dots, 52$.

Για $κ \geq 3$ προκύπτουν αριθμοί μεγαλύτεροι ή ίσοι του 240 που έχουμε ήδη εκφράσει στη μορφή $80κ + 3λ$, με $κ, λ \in \mathbb{N}$. Έτσι συνολικά δεν μπορούμε να εκφράσουμε στη ζητούμενη μορφή τους 79 αριθμούς $2, 5, 8, \dots, 77$ και $1, 4, 7, \dots, 157$, που περιγράψαμε παραπάνω.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$ με πλευρές $ΑΒ = α$ και $ΒΓ = β$. Έστω $Ο$ το σημείο τομής των διαγωνίων του. Προεκτείνουμε την πλευρά $ΒΑ$ προς το μέρος του $Α$ κατά τμήμα $ΑΕ = ΑΟ$ και την διαγώνιο $ΔΒ$ προς το μέρος του $Β$ κατά τμήμα $ΒΖ = ΒΟ$. Αν το τρίγωνο $ΕΖΓ$ είναι ισόπλευρο, τότε να αποδείξετε ότι:

(i) $β = α\sqrt{3}$, (ii) $AZ = EO$, (iii) $EO \perp ZΔ$.

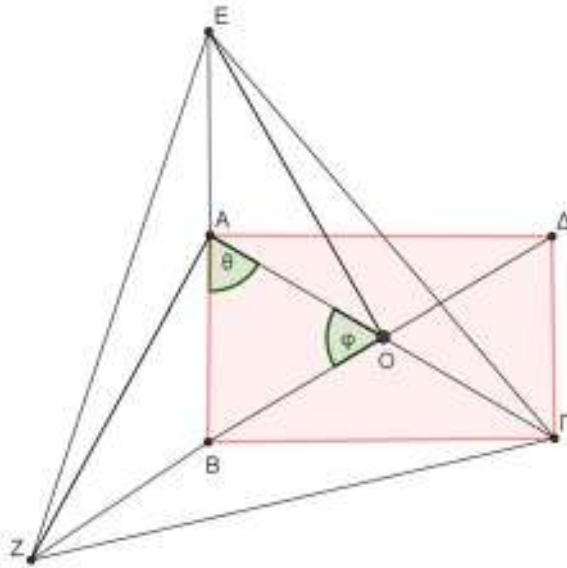
Λύση

Τα τρίγωνα $ΕΑΓ$ και $ΖΟΓ$ έχουν, λόγω των υποθέσεων τις τρεις πλευρές τους ίσες μία προς μία,

$$ΑΕ = ΟΓ, ΑΓ = ΟΖ \text{ και } ΕΓ = ΖΓ,$$

οπότε είναι ίσα. Άρα θα έχουν και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες. Έτσι προκύπτει η ισότητα

$$\widehat{E\hat{A}\Gamma} = \widehat{Z\hat{O}\Gamma} \Leftrightarrow 180^\circ - \widehat{B\hat{A}O} = 180^\circ - \widehat{A\hat{O}B} \Leftrightarrow \widehat{B\hat{A}O} = \widehat{A\hat{O}B},$$



Σχήμα 1

οπότε το τρίγωνο AOB είναι ισοσκελές με $AB = BO$. Όμως ισχύει $AO = OB$, ως μισά των ίσων διαγωνίων του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$. Άρα το τρίγωνο ABO είναι ισόπλευρο πλευράς $AB = \alpha$. Το ύψος του τριγώνου ABO έχει μήκος $\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$, αλλά ισούται και με το μισό της πλευράς $B\Gamma = \beta$. Επομένως έχουμε

$$\frac{\beta}{2} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \beta = \alpha\sqrt{3}.$$

(ii) Τα τρίγωνα AZO και OEB είναι ίσα, αφού έχουν

$$AO = OB, \quad OZ = EB \quad \text{και} \quad \widehat{Z\hat{O}A} = 60^\circ = \widehat{E\hat{B}O}.$$

Άρα θα έχουν και $AZ = ZO$.

(iii) Επειδή είναι $AO = AE = AB$ η διάμεσος του τριγώνου BOE ισούται με το μισό της πλευράς που αντιστοιχεί. Άρα είναι $\widehat{B\hat{O}E} = 90^\circ$ και $EO \perp Z\Delta$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Αν a, b είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 3 και οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί x, y και z έχουν γινόμενο 1, να αποδείξετε ότι:

$$(ax + b)(ay + b)(az + b) \geq 27.$$

Για ποιες τιμές των x, y και z αληθεύει η ισότητα;

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε την ανισότητα

$$a^3xyz + a^2b(xy + yz + zx) + ab^2(x + y + z) + b^3 \geq 27. \quad (1)$$

Όμως από την υπόθεση έχουμε ότι οι αριθμοί x, y και z είναι θετικοί με γινόμενο $xyz = 1$, οπότε χρησιμοποιώντας την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου λαμβάνουμε

$$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3, \quad (2)$$

$$xy + yz + zx \geq 3\sqrt[3]{xyyzzx} = 3\sqrt[3]{(xyz)^2} = 3 \quad (3)$$

Λόγω των (2), (3) και των υποθέσεων $a, b > 0$ και $xyz = 1$, έχουμε

$$a^3xyz + a^2b(xy + yz + zx) + ab^2(x + y + z) + b^3 \geq a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

οπότε, λόγω της μεταβατικής ιδιότητας, αρκεί, αντί της (1), να αποδείξουμε την ανισότητα

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \geq 27 \quad \text{ή} \quad (a+b)^3 \geq 27,$$

που ισχύει, αφού δίνεται ότι $a+b=3$.

Η ισότητα αληθεύει για x, y και z για τα οποία οι δύο ανισότητες (2) και (3) ισχύουν ως ισότητες, δηλαδή για $x = y = z = 1$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνονται τρεις παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και ε_3 ενός επιπέδου έτσι ώστε η ευθεία ε_2 να έχει την ίδια απόσταση α από τις ε_1 και ε_3 . Τοποθετούμε 5 σημεία M_1, M_2, M_3, M_4 και M_5 πάνω στις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και ε_3 , έτσι ώστε σε κάθε ευθεία να υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο. Να προσδιορίσετε το μέγιστο αριθμό ισοσκελών τριγώνων που είναι δυνατό να σχηματιστούν με κορυφές τρία από τα σημεία M_1, M_2, M_3, M_4 και M_5 με κατάλληλη τοποθέτησή τους πάνω στις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και ε_3 , σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

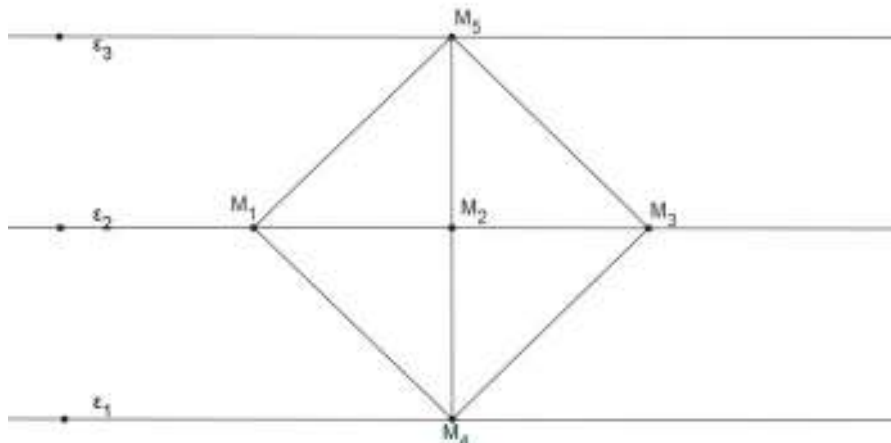
(α) $M_1, M_2, M_3 \in \varepsilon_2$, $M_4 \in \varepsilon_1$ και $M_5 \in \varepsilon_3$.

(β) $M_1, M_2 \in \varepsilon_1$, $M_3, M_4 \in \varepsilon_3$ και $M_5 \in \varepsilon_2$.

Λύση

Πρώτα από όλα σημειώνουμε ότι από 5 σημεία στα οποία δεν υπάρχουν τρία που να είναι συνευθειακά, σχηματίζονται ακριβώς $\binom{5}{3} = 10$ τρίγωνα. Στη συνέχεια για κάθε τριάδα συνευθειακών σημείων χάνεται και ένα τρίγωνο.

(α). Τρία από τα δεδομένα σημεία, έστω τα M_1, M_2, M_3 , ανήκουν στην ευθεία ε_2 .



Σχήμα 2

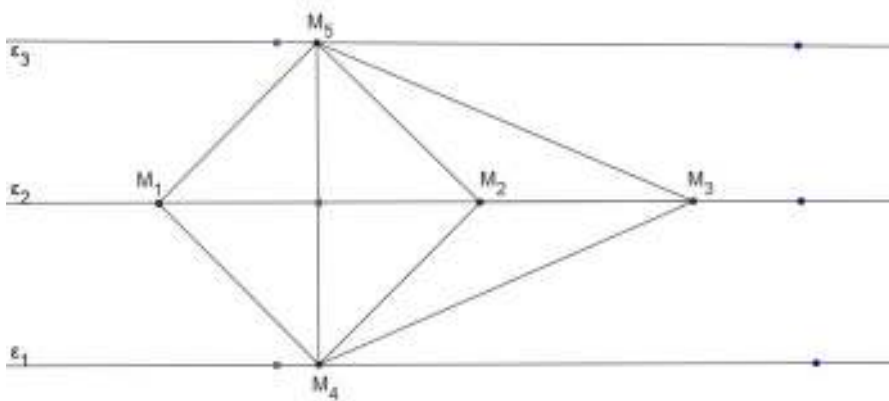
Τότε αυτά δεν σχηματίζουν τρίγωνο, ενώ τα άλλα δύο σημεία πρέπει να τοποθετηθούν από ένα σε καθεμία από τις άλλες δύο ευθείες. Για το σχηματισμό ισοσκελών

τριγώνων πρέπει τα σημεία αυτά να ανήκουν σε κάποια από τις μεσοκάθετες των ευθύγραμμων τμημάτων M_1M_2, M_2M_3, M_1M_3 . Αν το σημείο M_2 είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος M_1M_3 και τα M_4, M_5 ανήκουν στη μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος M_1M_3 και είναι $M_1M_2 \neq M_2M_4 = \alpha$, τότε σχηματίζονται δύο ισοσκελή τρίγωνα $M_1M_3M_4$ και $M_1M_3M_5$.

Παρατηρούμε όμως ότι, αν θεωρήσουμε στη προηγούμενη περίπτωση $M_1M_2 = M_2M_4 = M_2M_5 = \alpha$, που είναι δυνατόν, αφού οι παράλληλες ευθείες ισαπέχουν, τότε και τα τρίγωνα $M_1M_2M_4$ και $M_2M_3M_4$ καθώς και τα τρίγωνα $M_1M_2M_5$ και $M_2M_3M_5$ είναι ισοσκελή, οπότε έχουμε άλλα 4 ισοσκελή τρίγωνα. Επειδή και η ευθεία ε_2 είναι μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος M_4M_5 και τα τρίγωνα $M_1M_4M_5$ και $M_3M_4M_5$ είναι ισοσκελή. Άρα έχουμε συνολικά κατασκευάσει **8 ισοσκελή τρίγωνα** με κορυφές από τα πέντε σημεία που είναι και ο μέγιστος δυνατός αριθμός στη περίπτωση αυτή, δηλαδή όλα τα σχηματιζόμενα τρίγωνα είναι ισοσκελή.

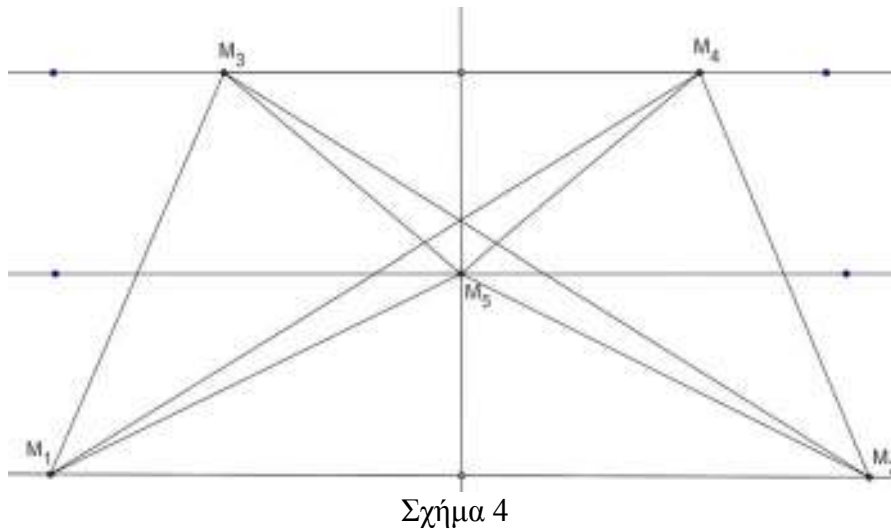
Στην περίπτωση που θεωρήσουμε τα $M_4 \in \varepsilon_1, M_5 \in \varepsilon_3$, έτσι ώστε η M_4M_5 να είναι μεσοκάθετη του M_1M_2 , τότε το τετράπλευρο $M_1M_4M_2M_5$ είναι ρόμβος (τετράγωνο, αν $M_1M_2 = 2\alpha$) και από τα τέσσερα σημεία προκύπτουν 4 ισοσκελή τρίγωνα, τα $M_1M_2M_4, M_1M_2M_5, M_1M_4M_5$ και $M_2M_4M_5$. Το σημείο M_3 μπορεί να επιλεγεί πάνω στην ευθεία ε_2 έτσι ώστε $M_2M_3 = M_3M_4 = M_2M_5$, οπότε πλέον σχηματίζονται άλλα τρία ισοσκελή τρίγωνα, τα $M_2M_3M_4, M_2M_3M_5$ και $M_3M_4M_5$. Έτσι έχουμε συνολικά κατασκευάσει **7 ισοσκελή τρίγωνα**. Αν είναι $M_2M_3 \neq M_2M_4 = M_2M_5$, τότε θα έχουμε συνολικά **5 ισοσκελή τρίγωνα**.

Άρα ο μέγιστος αριθμός ισοσκελών τριγώνων στη περίπτωση αυτή είναι 8.



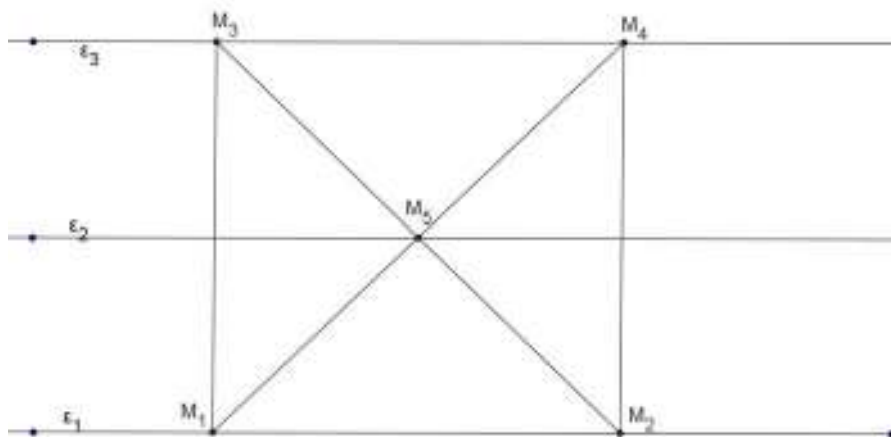
Σχήμα 3

(β). Σε τυχαία τοποθέτηση των σημείων M_1, M_2 πάνω στην ευθεία ε_1 και των M_3, M_4 πάνω στην ευθεία ε_3 το τετράπλευρο $M_1M_2M_4M_3$ είναι τραπέζιο, οπότε από τα 4 αυτά σημεία σχηματίζονται ένα ή δύο ισοσκελή τρίγωνα, μόνο στην περίπτωση που μία από τις βάσεις ισούται με τη μία ή με τις δύο μη παράλληλες πλευρές, αντίστοιχα.



Σχήμα 4

Το σημείο M_5 πρέπει να τοποθετηθεί πάνω στην ευθεία ε_2 , αλλά και στη μεσοκάθετη κάποιου από τα ευθύγραμμα τμήματα με άκρα τα σημεία M_1, M_2, M_3 και M_4 . Στην περίπτωση ισοσκελούς τραπεζίου $M_1M_2M_4M_3$ οι δύο βάσεις M_1M_2 και M_3M_4 έχουν κοινή μεσοκάθετη δ , οπότε για $M_5 = \delta \cap \varepsilon_2$ προκύπτουν δύο ισοσκελή τρίγωνα. Συνολικά στην τοποθέτηση αυτή σχηματίζονται το **πολύ 4 ισοσκελή τρίγωνα**.



Σχήμα 5

Στην ίδια περίπτωση, αν πάρουμε τα τέσσερα σημεία M_1, M_2, M_3, M_4 , πάνω στις δύο ευθείες ε_1 και ε_3 , έτσι ώστε να σχηματίζουν τετράγωνο, τότε αυτά σχηματίζουν 4 ισοσκελή τρίγωνα. Στη συνέχεια, αν πάρουμε το σημείο M_5 πάνω στην ευθεία ε_2 , έτσι ώστε να συμπίπτει με το κέντρο του τετραγώνου που ορίζουν τα τέσσερα πρώτα σημεία, τότε με μία κορυφή το σημείο M_5 σχηματίζονται άλλα τέσσερα ισοσκελή τρίγωνα. Έτσι έχουμε συνολικά **8 ισοσκελή τρίγωνα**.

Στην περίπτωση που τα 4 πρώτα σημεία σχηματίζουν παραλληλόγραμμο, τότε δεν προκύπτουν ισοσκελή τρίγωνα, εκτός εάν το τετράπλευρο $M_1M_2M_4M_3$ είναι ρόμβος, οπότε έχουμε συνολικά **4 ή 5 το πολύ ισοσκελή τρίγωνα**, ανάλογα με τη θέση του σημείου M_5 πάνω στην ευθεία ε_2 .



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
27^η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"

ΣΑΒΒΑΤΟ, 27 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2010

Θέματα μεγάλων τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να προσδιορίσετε τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης

$$x^4 - 6x^2 + 1 = 7 \cdot 2^y. \quad (1)$$

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Παρατηρούμε ότι για $y < 0$ η δεδομένη εξίσωση δεν μπορεί να έχει ακέραιες λύσεις. Ομοίως για $y = 0$ η (1) δεν έχει ακέραια λύση

Για $y \in \mathbb{Z}$, $y \geq 1$, η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^4 - 6x^2 + (1 - 7 \cdot 2^y) = 0 \quad (2)$$

η οποία για να έχει ακέραιες λύσεις **πρέπει** η διακρίνουσα της αντίστοιχης επιλύουσας της (2) να είναι τέλειο τετράγωνο ακέραιου, δηλαδή πρέπει

$$\Delta = 36 - 4(1 - 7 \cdot 2^y) = 32 + 4 \cdot 7 \cdot 2^y = 4 \cdot (8 + 7 \cdot 2^y)$$

να είναι τέλειο τετράγωνο ακέραιου. Επειδή είναι $4 = 2^2$, για να είναι ο αριθμός Δ τέλειο τετράγωνο ακέραιου πρέπει και αρκεί ο αριθμός

$$A = 8 + 7 \cdot 2^y, \quad y \geq 1$$

να είναι τέλειο τετράγωνο ακέραιου. Όμως ο αριθμός A είναι άρτιος, οπότε, αν είναι τέλειο τετράγωνο, τότε θα ισχύει ότι

$$A = 8 + 7 \cdot 2^y = (2\kappa)^2 = 4\kappa^2, \quad \kappa \in \mathbb{Z}, \kappa > 0.$$

$$\Leftrightarrow 2 + 7 \cdot 2^{y-2} = \kappa^2, \quad \kappa \in \mathbb{Z}, \kappa > 0 \quad (3)$$

Η εξίσωση (3) για $y = 1$ είναι αδύνατη, ενώ για $y = 2$ δίνει $\kappa = 3$, οπότε είναι $A = 36$ και $\Delta = 4 \cdot 36 = 12^2$. Έτσι η εξίσωση (2) έχει τις λύσεις

$$x^2 = \frac{6 \pm 12}{2} \Leftrightarrow x^2 = 9 \text{ ή } x^2 = -3 \text{ (απορρίπτεται)} \Leftrightarrow x = \pm 3.$$

Για $y = 3$, η εξίσωση (3) δίνει $\kappa = 4$, οπότε είναι $A = 64$ και $\Delta = 4 \cdot 64 = 16^2$. Έτσι η εξίσωση (2) έχει τις λύσεις

$$x^2 = \frac{6 \pm 16}{2} \Leftrightarrow x^2 = 11 \text{ ή } x^2 = -5,$$

από τις οποίες καμία δεν είναι αποδεκτή.

Για $y \geq 4$, αφού ο ακέραιος $B = 2 + 7 \cdot 2^{y-2}$ είναι άρτιος, η εξίσωση (3) είναι ισόδυναμη με την εξίσωση

$$2 + 7 \cdot 2^{y-2} = (2\lambda)^2, \lambda \in \mathbb{Z}, \lambda > 0 \Leftrightarrow 1 + 7 \cdot 2^{y-3} = 2\lambda^2, \lambda \in \mathbb{Z}, \lambda > 0,$$

η οποία είναι αδύνατη.

Άρα οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης είναι οι: $(x, y) = (\pm 3, 2)$.

2^{ος} τρόπος

Όπως και στον πρώτο τρόπο παρατηρούμε ότι για $y \leq 0$ η εξίσωση είναι αδύνατη στους ακέραιους.

Η δεδομένη εξίσωση γράφεται στη μορφή

$$(x^2 + 2x - 1)(x^2 - 2x - 1) = 7 \cdot 2^y, \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 2x - 1 = 2^a, a \in \mathbb{Z}_+ \\ x^2 - 2x - 1 = 7 \cdot 2^b, b \in \mathbb{Z}_+ \\ a + b = y \end{array} \right\} (\Sigma_1) \quad \text{ή} \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 2x - 1 = 2^k, k \in \mathbb{Z}_+ \\ x^2 + 2x - 1 = 7 \cdot 2^\lambda, \lambda \in \mathbb{Z}_+ \\ k + \lambda = y \end{array} \right\} (\Sigma_2)$$

Λύση (Σ_1)

Για να έχει ακέραια λύση η εξίσωση $x^2 + 2x - 1 = 2^a$ **πρέπει** η διακρίνουσά της $\Delta = 4 + 4(1 + 2^a) = 4(2 + 2^a)$ να είναι τέλειο τετράγωνο ακέραιου, για το οποίο **πρέπει και αρκεί** ο αριθμός $K = 2 + 2^a$ να είναι τέλειο τετράγωνο ακέραιου.

Για $a = 0$ ή $a = 2$ ο αριθμός K δεν είναι τέλειο τετράγωνο, ενώ για $a = 1$ είναι $K = 4 = 2^2$, οπότε η εξίσωση $x^2 + 2x - 1 = 2^1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$ έχει τις λύσεις $x = -3$ ή $x = 1$.

Για $x = -3$ η εξίσωση $x^2 - 2x - 1 = 7 \cdot 2^b$ δίνει την εξίσωση $14 = 7 \cdot 2^b$ η οποία έχει τη λύση $b = 1$, οπότε προκύπτει $y = a + b = 2$ και για την δεδομένη εξίσωση η λύση $(x, y) = (-3, 2)$

Για $x = 1$ η εξίσωση $x^2 - 2x - 1 = 7 \cdot 2^b$ δίνει την εξίσωση $-2 = 7 \cdot 2^b$ η οποία είναι αδύνατη.

Για $a \geq 3$, αφού ο αριθμός $K = 2 + 2^a$ είναι άρτιος, πρέπει

$$K = 2 + 2^a = (2m)^2, m \in \mathbb{Z}_+ \Leftrightarrow 1 + 2^{a-2} = 2m^2, m \in \mathbb{Z}_+,$$

η οποία είναι αδύνατη.

Λύση (Σ_2)

Για να έχει ακέραια λύση η εξίσωση $x^2 - 2x - 1 = 2^k$ **πρέπει** η διακρίνουσά της $\Delta = 4 + 4(1 + 2^k) = 4(2 + 2^k)$ να είναι τέλειο τετράγωνο ακέραιου, για το οποίο **πρέπει και αρκεί** ο αριθμός $\Lambda = 2 + 2^k$ να είναι τέλειο τετράγωνο ακέραιου.

Για $k = 0$ ή $k = 2$ ο αριθμός Λ δεν είναι τέλειο τετράγωνο, ενώ για $k = 1$ είναι $\Lambda = 4 = 2^2$, οπότε η εξίσωση $x^2 - 2x - 1 = 2^1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ έχει τις λύσεις $x = 3$ ή $x = -1$.

Για $x = 3$ η εξίσωση $x^2 + 2x - 1 = 7 \cdot 2^\lambda$ δίνει την εξίσωση $14 = 7 \cdot 2^\lambda$ η οποία έχει τη λύση $\lambda = 1$, οπότε προκύπτει $y = k + \lambda = 2$ και για την δεδομένη εξίσωση η λύση $(x, y) = (3, 2)$

Για $x = -1$ η εξίσωση $x^2 + 2x - 1 = 7 \cdot 2^\lambda$ δίνει την εξίσωση $-2 = 7 \cdot 2^\lambda$ η οποία είναι αδύνατη.

Για $a \geq 3$, αφού ο αριθμός $\Lambda = 2 + 2^\lambda$ είναι άρτιος πρέπει

$$\Lambda = 2 + 2^\kappa = (2m)^2, m \in \mathbb{Z}_+ \Leftrightarrow 1 + 2^{\kappa-2} = 2m^2, m \in \mathbb{Z}_+,$$

η οποία είναι αδύνατη.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί x και y έχουν άθροισμα 2α , όπου $\alpha > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$x^3 y^3 (x^2 + y^2)^2 \leq 4\alpha^{10}. \quad (1)$$

Για ποιες τιμές των x και y αληθεύει η ισότητα;

Λύση

Επειδή για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x, y δίνεται ότι $x + y = 2\alpha$, $\alpha > 0$, μπορούμε να θέσουμε:

$$x = \alpha + t, y = \alpha - t, -\alpha \leq t \leq \alpha.$$

Με αντικατάσταση των x, y στην (1), προκύπτει ότι, αρκεί να αποδείξουμε την ανισότητα

$$\begin{aligned} & (\alpha + t)^3 (\alpha - t)^3 \left[(\alpha + t)^2 + (\alpha - t)^2 \right]^2 \leq 4\alpha^{10} \\ \Leftrightarrow & 4(\alpha^2 - t^2)^3 (\alpha^2 + t^2)^2 \leq 4\alpha^{10} \\ \Leftrightarrow & (\alpha^2 - t^2)(\alpha^2 - t^2)^2 (\alpha^2 + t^2)^2 \leq \alpha^{10} \\ \Leftrightarrow & (\alpha^2 - t^2)(\alpha^4 - t^4)^2 \leq \alpha^{10}, \end{aligned}$$

η οποία αληθεύει, αφού λόγω της υπόθεσης $-\alpha \leq t \leq \alpha$ για τη νέα μεταβλητή t , έχουμε

$$(\alpha^2 - t^2)(\alpha^4 - t^4)^2 \leq \alpha^2 \cdot \alpha^8 = \alpha^{10}.$$

Η ισότητα ισχύει όταν $t = 0$, δηλαδή όταν $x = y = \alpha$.

Παρατήρηση

Για $x + y = 2\alpha$ ισχύει ότι

$$xy \leq \left(\frac{x+y}{2} \right)^2 = \alpha^2 \quad (1)$$

$$\Rightarrow x^3 y^3 \leq \left(\frac{x+y}{2} \right)^6 = \alpha^6 \quad (2)$$

όπου η ισότητα ισχύει για $x = y = \alpha$.

Επίσης, για $x + y = 2\alpha$ ισχύει ότι

$$2\alpha^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\alpha^2 \quad (3)$$

$$\Rightarrow 4\alpha^4 \leq (x^2 + y^2)^2 \leq 16\alpha^4 \quad (4)$$

όπου η ισότητα αριστερά ισχύει για $x = y = \alpha$, ενώ η ισότητα δεξιά ισχύει για $(x, y) = (2\alpha, 0)$ ή $(0, 2\alpha)$.

Όμως από τις (2) και (4) δεν μπορεί να προκύψει η ζητούμενη ανισότητα. Επομένως πρέπει να προσδιορίσουμε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x, y) = x^3 y^3 (x^2 + y^2)^2 = xy [xy(x^2 + y^2)]^2 = xyg(x, y),$$

υπό τη συνθήκη $x + y = 2\alpha$. Όμως η συνάρτηση $g(x, y) = x^2 y^2 (x^2 + y^2)^2$ έχει μέγιστη τιμή, όταν η συνάρτηση $h(x, y) = xy(x^2 + y^2)$ έχει μέγιστη τιμή, δηλαδή όταν η συνάρτηση

$$\varphi(x) = h(x, 2\alpha - x) = x(2\alpha - x)(2x^2 - 4\alpha x + 4\alpha^2), 0 \leq x \leq 2\alpha$$

έχει μέγιστη τιμή $\varphi(\alpha) = 2\alpha^4$, όπως εύκολα προκύπτει με χρήση παραγώγων. Από αυτό και την (1) μπορεί να προκύψει η ζητούμενη ανισότητα.

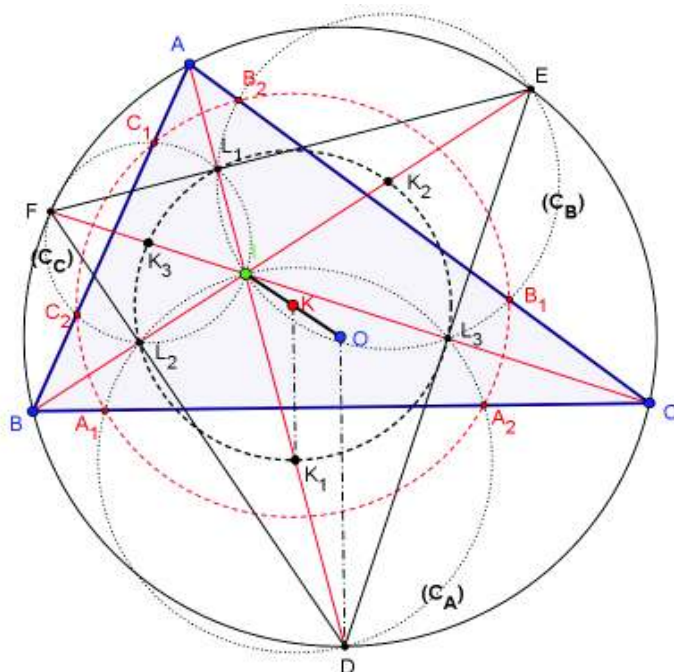
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Δίνεται τρίγωνο ABC εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) και έστω I το έκκεντρό του. Οι προεκτάσεις των AI, BI και CI τέμνουν το περιγεγραμμένο κύκλο στα σημεία D, E και F αντίστοιχα. Οι κύκλοι με διάμετρο ID, IE και IF τέμνουν τις πλευρές BC, AC και AB στα σημεία A_1, A_2, B_1, B_2 και C_1, C_2 αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ είναι ομοκυκλικά.

Λύση

Έστω (C_A) ο κύκλος με κέντρο το K_1 και διάμετρο ID (K_1 το μέσο του ID), (C_B) ο κύκλος με κέντρο το K_2 και διάμετρο IE (K_2 το μέσο του IE) και (C_C) ο κύκλος με κέντρο το K_3 και διάμετρο IF (K_3 μέσο του IF).



Σχήμα 1

Θεωρούμε τις γνωστές ισότητες ευθυγράμμων τμημάτων:

$$DI = DB = DC, EI = EA = EC \text{ και } FI = FA = FB \quad (1)$$

Οι κύκλοι (C_A) και (C_C) τέμνονται στα σημεία I και L_2 .

Οι γωνίες $D\hat{L}_2I$ και $F\hat{L}_2I$ είναι ορθές διότι βαίνουν στις διαμέτρους DI και FI των κύκλων (C_A) και (C_C) οπότε τα σημεία D, L_2, F είναι συνευθειακά.

Σε συνδυασμό με τις ισότητες (1) καταλήγουμε ότι η DF είναι μεσοκάθετη της IB . Με όμοιο τρόπο καταλήγουμε ότι η DE είναι μεσοκάθετη της IC και η EF είναι μεσοκάθετη της IA .

Άρα το σημείο I είναι ορθόκентρο του τριγώνου DEF του οποίου το περίκентρο ταυτίζεται με το περίκентρο O του τριγώνου ABC .

Τα σημεία K_1, K_2, K_3 και L_1, L_2, L_3 ανήκουν στο κύκλο του EULER του τριγώνου DEF που έχει κέντρο το μέσο K του ευθύγραμμου τμήματος IO .

Στο τρίγωνο IOD , έχουμε: K_1 το μέσο του ID και K το μέσο του IO .

Άρα $KK_1 \parallel OD$ και επειδή $OD \perp BC$ συμπεραίνουμε ότι το K ανήκει στη μεσοκάθετη του A_1A_2 . Με όμοιο τρόπο συμπεραίνουμε ότι το K ανήκει στη μεσοκάθετη των B_1B_2 και C_1C_2 .

Θα αποδείξουμε ότι τα σημεία $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ ανήκουν σε κύκλο με κέντρο το σημείο K .

Θεωρώντας τη δύναμη του σημείου A ως προς τους κύκλους (C_B) και (C_C) έχουμε:

$$AC_1 \cdot AC_2 = AB_1 \cdot AB_2 = AI \cdot AL_1.$$

Άρα τα σημεία B_1, B_2, C_1, C_2 ανήκουν σε κύκλο με κέντρο το σημείο K .

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

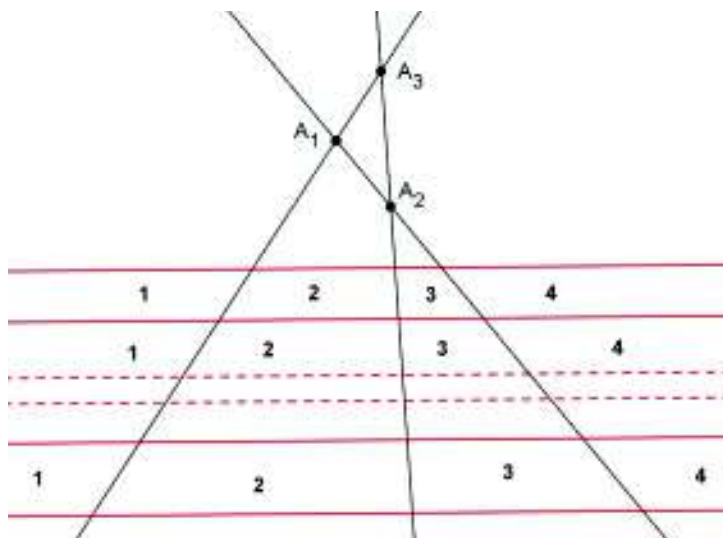
Στο επίπεδο θεωρούμε $k + n$ διαφορετικές μεταξύ τους ευθείες, όπου k ακέραιος με $k > 1$ και n θετικός ακέραιος, οι οποίες ανά τρεις δεν περνάνε από το ίδιο σημείο. Από τις ευθείες αυτές, k είναι παράλληλες μεταξύ τους ενώ οι υπόλοιπες n τέμνονται ανά δύο και δεν υπάρχει κάποια από αυτές που να είναι παράλληλη με τις k παράλληλες ευθείες. Όλες οι παραπάνω ευθείες τεμνόμενες διαμερίζουν το επίπεδο σε χωρία (π. χ τριγωνικά, πολυγωνικά και μη φραγμένα). Δύο χωρία θεωρούνται διαφορετικά, αν δεν έχουν κοινά σημεία ή αν έχουν κοινά σημεία μόνο στο σύνορό τους. Ένα χωρίο θα το ονομάζουμε “καλό” όταν βρίσκεται ανάμεσα στις παράλληλες ευθείες. Αν σε ένα σχηματισμό, το ελάχιστο πλήθος των “καλών” χωρίων είναι 176 και το μέγιστο πλήθος τους είναι 221, να βρεθούν τα k, n .

Λύση

Προφανώς οι k (διαφορετικές μεταξύ τους) παράλληλες ευθείες ορίζουν $k - 1$ διαδοχικές παράλληλες “λωρίδες” στο επίπεδο. Επίσης οι n διαφορετικές, μη παράλληλες μεταξύ τους ευθείες, τέμνονται ανά δύο σε $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ σημεία.

Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις.

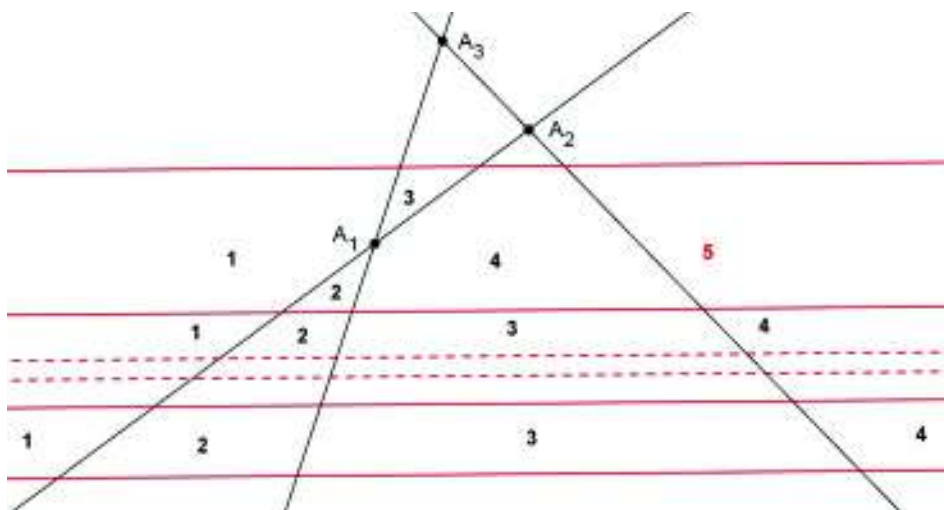
1^η Περίπτωση: Τα $\binom{n}{2}$ σημεία τομής των n ευθειών (που τέμνονται ανά δύο), βρίσκονται εκτός των παράλληλων “λωρίδων”.



Σχήμα 2

Στη περίπτωση αυτή κάθε μία από τις n ευθείες ορίζει σε κάθε “λωρίδα” $n+1$ “καλά” χωρία. Άρα ορίζονται συνολικά $(k-1)(n+1)$ συνολικά “καλά” χωρία. Στο σχήμα 2 βλέπουμε τα “καλά” χωρία που δημιουργούνται από $n=3$ ευθείες.

Αν τώρα ένα από τα $\binom{n}{2}$ σημεία τομής των n ευθειών το θεωρήσουμε μέσα σε μία λωρίδα των παράλληλων ευθειών, τότε στη λωρίδα αυτή θα δημιουργηθεί ένα επιπλέον “καλό” χωρίο (σχήμα 3).

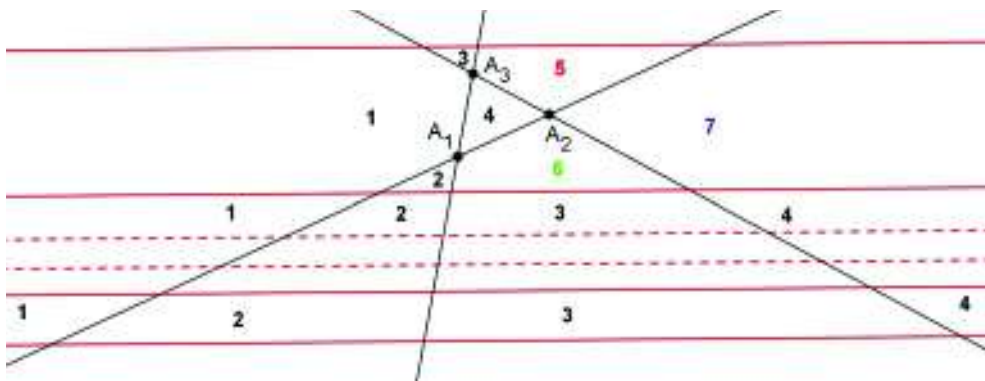


Σχήμα 3

Άρα $(k-1)(n+1)$ είναι ο ελάχιστος αριθμός “καλών” χωρίων που μπορούν να δημιουργηθούν, διότι με την είσοδο καθενός από τα $\binom{n}{2}$ σημεία τομής στις λωρίδες, αυξάνεται ο αριθμός των “καλών” χωρίων.

2^η Περίπτωση: Τα $\binom{n}{2}$ σημεία τομής των n ευθειών (που τέμνονται ανά δύο), βρίσκονται εντός των παράλληλων λωρίδων.

Συνεχίζοντας τη διαδικασία εισαγωγής των σημείων τομής μέσα στις “λωρίδες”, θα προστίθεται κάθε φορά και ένα “καλό” χωρίο. Έτσι στο τέλος θα έχουμε επί πλέον $\binom{n}{2}$ “καλά” χωρία.



Σχήμα 4

Τελικά ο μέγιστος αριθμός των “καλών” χωρίων είναι:

$$(k-1)(n+1) + \frac{n(n-1)}{2}.$$

Εφόσον τώρα (σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος), ο ελάχιστος αριθμός των “καλών” χωρίων είναι 176 και ο μέγιστος 221, θα ισχύει:

$$\begin{cases} (k-1)(n+1) = 176 \\ (k-1)(n+1) + \frac{n(n-1)}{2} = 221 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (k-1)(n+1) = 176 \\ 176 + \frac{n(n-1)}{2} = 221 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (k-1)(n+1) = 176 \\ 176 + \frac{n(n-1)}{2} = 221 \end{cases} \Leftrightarrow k = 17, n = 10.$$

Δεύτερος τρόπος υπολογισμού του μέγιστου αριθμού των καλών χωρίων.

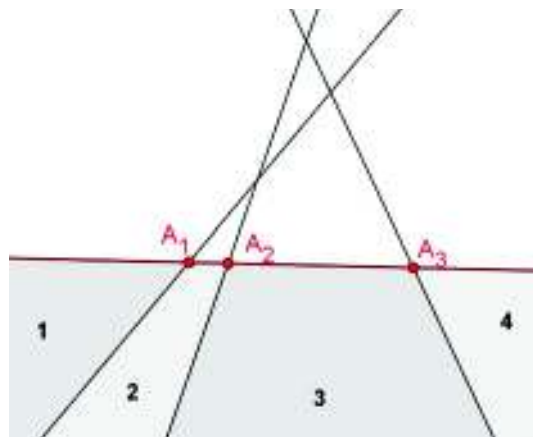
Με τη συλλογιστική που αναπτύχθηκε στον προηγούμενο τρόπο, ο μέγιστος αριθμός των καλών χωρίων επιτυγχάνεται όταν τα σημεία τομής των τεμνομένων ευθειών βρεθούν μέσα στις λωρίδες που δημιουργούν οι παράλληλες ευθείες.

Θα υπολογίσουμε λοιπόν όλα τα χωρία που δημιουργούνται από τις $k+n$ διαφορετικές μεταξύ τους ευθείες και στη συνέχεια θα αφαιρέσουμε τα χωρία που βρίσκονται εκτός των παραλλήλων (έχοντας πάντα υπό όψιν ότι τα σημεία τομής των τεμνομένων ευθειών βρίσκονται μέσα στις λωρίδες που δημιουργούν οι παράλληλες ευθείες).

Έστω $p(m)$ το πλήθος των χωρίων στα οποία χωρίζεται το επίπεδο από m ευθείες οι οποίες δεν διέρχονται ανά τρεις από το ίδιο σημείο.

Προφανώς $p(1) = 2$. Θεωρούμε τώρα ότι $p(m)$ είναι το πλήθος των χωρίων στα οποία χωρίζεται το επίπεδο από τις m ευθείες και φέρουμε μία επί πλέον ευθεία με σκοπό να υπολογίσουμε επαγωγικά το $p(m+1)$.

Προφανώς $p(m+1) = p(m) + r$, όπου r είναι το πλήθος των επί πλέον χωρίων που “δημιουργούνται” με τη χάραξη της $(m+1)^{\text{ης}}$ ευθείας.



Σχήμα 5

Με τη χάραξη λοιπόν της $(m+1)^{\text{ης}}$ ευθείας “δημιουργούνται” τόσα επί πλέον χωρία, όσα είναι τα σημεία τομής της με τις υπόλοιπες ευθείες αυξημένα κατά ένα. Αν δηλαδή η $(m+1)$ -ευθεία είναι παράλληλη με κάποια από τις προηγούμενες ευθείες, τότε τα σημεία τομής της θα είναι $m-1$ και κατά συνέπεια “δημιουργούνται” $r = m$ επί πλέον χωρία.

Αν όμως η $m+1$ ευθεία δεν είναι παράλληλη με κάποια από τις προηγούμενες ευθείες, τότε τα σημεία τομής της θα είναι m και κατά συνέπεια “δημιουργούνται” $r = m+1$ επί πλέον χωρία.

Αν λοιπόν οι ευθείες δεν είναι ανά δύο παράλληλες μεταξύ τους και δεν διέρχονται ανά τρεις από το ίδιο σημείο, μπορούμε να διατυπώσουμε την αναδρομική σχέση:

$$p(m) = p(m-1) + m \text{ και } p(1) = 2 .$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει:

$$p(m) = \frac{m^2 + m + 2}{2} .$$

Θεωρώντας τώρα τα δεδομένα του προβλήματος, συμπεραίνουμε ότι τα χωρία που “δημιουργούνται”, είναι: $\frac{n^2 + n + 2}{2} + k(n+1)$. Τα καλά χωρία προκύπτουν αν αφαιρέσουμε τα $2(n+1)$ που βρίσκονται εκτός των παραλλήλων ευθειών.