



**ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ**  
**28<sup>η</sup> Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα**  
**"Ο Αρχιμήδης"**  
**ΣΑΒΒΑΤΟ, 26 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2011**  
**Θέματα μικρών τάξεων**

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1**

Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$ , με  $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 120^\circ$ , στο οποίο η διάμεσος  $AD$  είναι κάθετη προς την πλευρά  $AB$  και τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου  $AB\Gamma$  στο σημείο  $E$ . Οι ευθείες  $BA$  και  $E\Gamma$  τέμνονται στο  $Z$ . Να αποδείξετε ότι:

(α)  $ZD \perp BE$ , (β)  $ZD = B\Gamma$ .

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2**

Θεωρούμε το σύνολο των τετρανήφινων θετικών ακέραιων αριθμών  $x = \overline{\alpha\beta\gamma\delta}$  των οποίων όλα τα ψηφία είναι διαφορετικά από το μηδέν και διαφορετικά μεταξύ τους. Θεωρούμε επίσης τους αριθμούς  $y = \overline{\delta\gamma\beta\alpha}$  και υποθέτουμε  $x > y$ . Βρείτε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή της διαφοράς  $x - y$ , καθώς και τους αντίστοιχους τετρανήφινους ακέραιους  $x, y$  για τους οποίους λαμβάνονται αυτές οι τιμές.

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3**

Αν ο αριθμός  $3n+1$ , όπου  $n$  ακέραιος, είναι πολλαπλάσιο του 7, να βρείτε τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης:

(α) του  $n$  με το 7,

(β) του  $n^m$  με το 7, για τις διάφορες τιμές του θετικού ακεραίου  $m$ ,  $m > 1$ .

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4**

Αν  $x, y, z$  είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 12, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + 3 \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

*Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες*  
*Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες*

*Καλή επιτυχία*



**ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ**  
**28<sup>η</sup> Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα**  
**"Ο Αρχιμήδης"**  
**ΣΑΒΒΑΤΟ, 26 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2011**

**Θέματα μεγάλων τάξεων**

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1**

Να λύσετε στους ακέραιους την εξίσωση

$$x^3 y^2 (2y - x) = x^2 y^4 - 36.$$

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2**

Στο καρτεσιανό επίπεδο  $Oxy$  θεωρούμε τα σημεία  $A_1(40,1), A_2(40,2), \dots, A_{40}(40,40)$  καθώς και τα ευθύγραμμα τμήματα  $OA_1, OA_2, \dots, OA_{40}$ . Ένα σημείο του καρτεσιανού επιπέδου  $Oxy$  θα το ονομάζουμε "καλό", όταν οι συντεταγμένες του είναι ακέραιοι αριθμοί και βρίσκεται στο εσωτερικό (δηλαδή δεν ταυτίζεται με κάποιο από τα άκρα του) ενός ευθυγράμμου τμήματος  $OA_i$ ,  $i=1,2,3,\dots,40$ . Επίσης, ένα από τα ευθύγραμμα τμήματα  $OA_1, OA_2, \dots, OA_{40}$ , θα το ονομάζουμε "καλό", όταν περιέχει ένα τουλάχιστον "καλό" σημείο. Να υπολογισθεί το πλήθος των "καλών" σημείων και το πλήθος των "καλών" ευθυγράμμων τμημάτων.

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3**

Αν  $a, b, c$  είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 6, να προσδιορίσετε τη μέγιστη τιμή της παράστασης:

$$S = \sqrt[3]{a^2 + 2bc} + \sqrt[3]{b^2 + 2ca} + \sqrt[3]{c^2 + 2ab}.$$

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4**

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο  $ABC$  (με  $AB < AC$ ), εγγεγραμμένο σε κύκλο  $c(O, R)$  (με κέντρο το σημείο  $O$  και ακτίνα  $R$ ). Η προέκταση του ύψους  $AD$  τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο σημείο  $E$  και η μεσοκάθετη ( $\mu$ ) της πλευράς  $AB$  τέμνει την  $AD$  στο σημείο  $L$ . Η  $BL$  τέμνει την  $AC$  στο σημείο  $M$  και τον περιγεγραμμένο κύκλο  $c(O, R)$  στο σημείο  $N$ . Τέλος η  $EN$  τέμνει τη μεσοκάθετη ( $\mu$ ) στο σημείο  $Z$ . Να αποδείξετε ότι:

$$MZ \perp BC \Leftrightarrow (CA = CB \text{ ή } Z \equiv O),$$

δηλαδή ότι "η  $MZ$  είναι κάθετη στην  $BC$ , αν, και μόνο αν, το τρίγωνο  $ABC$  είναι ισοσκελές με  $CA = CB$  ή το σημείο  $Z$  ταυτίζεται με το κέντρο  $O$  του περιγεγραμμένου κύκλου  $c(O, R)$ ".

*Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες και 30 λεπτά*  
*Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες*

*Καλή επιτυχία*