



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
29^η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
3 Μαρτίου 2012

Θέματα μικρών τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB < A\Gamma < B\Gamma$), εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O, R)$ (με κέντρο το σημείο O και ακτίνα R). Ο κύκλος $c_1(A, AB)$ (με κέντρο το σημείο A και ακτίνα AB) τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο Δ και τον περιγεγραμμένο κύκλο $c(O, R)$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι η πλευρά $A\Gamma$ διχοτομεί τη γωνία $\Delta\hat{A}E$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$, να λύσετε την εξίσωση

$$\|x - 4| - 2x + 8| = ax + 4.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Οι θετικοί ακέραιοι m, n , με $m > n$, ικανοποιούν την εξίσωση

$$\text{ΕΚΠ}\{m, n\} + \text{ΜΚΔ}\{m, n\} = m + n. \quad (*)$$

(α) Να αποδείξετε ότι ο n είναι διαιρέτης του m .

(β) Αν επιπλέον ισχύει ότι $m - n = 10$, να προσδιορίσετε όλα τα ζευγάρια (m, n) που είναι λύσεις της εξίσωσης (*).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Πάνω σε επίπεδο Π δίνεται ευθεία ε και πάνω στην ε δίνονται δύο σημεία A_1, A_2 , διαφορετικά μεταξύ τους. Θεωρούμε ακόμη και δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία A_3, A_4 του επιπέδου Π που δεν ανήκουν στην ευθεία ε . Να εξετάσετε, αν είναι δυνατόν να τοποθετηθούν τα σημεία A_3 και A_4 σε τέτοιες θέσεις, ώστε να σχηματίζεται ο μεγαλύτερος δυνατός αριθμός ισοσκελών τριγώνων με κορυφές τρία από τα τέσσερα σημεία A_1, A_2, A_3, A_4 :

(α) όταν τα σημεία A_3, A_4 ανήκουν σε διαφορετικά ημιεπίπεδα ως προς την ευθεία ε ,

(β) όταν τα σημεία A_3, A_4 ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ε .

Να δώσετε όλες τις δυνατές περιπτώσεις και σε κάθε περίπτωση να εξηγήσετε πως μπορούν να προσδιοριστούν γεωμετρικά τα σημεία A_3 και A_4 .

*Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες και 30 λεπτά
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες*

Καλή επιτυχία!



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
29^η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
3 Μαρτίου 2012

Θέματα μεγάλων τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Οι θετικοί ακέραιοι p, q είναι πρώτοι μεταξύ τους και ικανοποιούν την εξίσωση

$$p + q^2 = (n^2 + 1)p^2 + q,$$

όπου η παράμετρος n είναι θετικός ακέραιος. Βρείτε όλα τα δυνατά ζεύγη (p, q) .

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Να προσδιορίσετε όλα τα μη μηδενικά πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ με πραγματικούς συντελεστές, ελαχίστου δυνατού βαθμού, τέτοια ώστε

$$P(x^2) + Q(x) = P(x) + x^5 Q(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

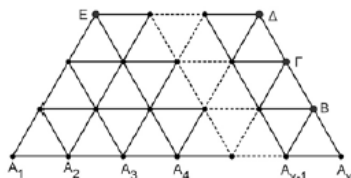
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB < A\Gamma < B\Gamma$), εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O, R)$ (με κέντρο το σημείο O και ακτίνα R). Η διχοτόμος AD τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο $c(O, R)$ στο σημείο K . Ο κύκλος $c_1(O_1, R_1)$ (που έχει το κέντρο στην OA και περνάει από τα σημεία A, Δ), τέμνει την AB στο E και την $A\Gamma$ στο Z . Αν M, N είναι τα μέσα των $Z\Gamma$ και BE αντίστοιχα, αποδείξτε ότι οι ευθείες $EZ, \Delta M, K\Gamma$ περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω T), οι ευθείες $EZ, \Delta N, KB$ περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω S) και ότι η OK είναι μεσοκάθετη της TS .

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Το ισοσκελές τραπέζιο του σχήματος αποτελείται από ίσα μεταξύ τους ισόπλευρα τρίγωνα που οι πλευρές τους έχουν μήκος 1. Η πλευρά A_1E έχει μήκος 3 και η μεγάλη βάση του A_1A_n έχει μήκος $n-1$. Ξεκινάμε από το σημείο A_1 και

κινούμαστε κατά μήκος των ευθυγράμμων τμημάτων που ορίζονται μόνο προς τα δεξιά και επάνω (λοξά αριστερά ή λοξά δεξιά).



Υπολογίστε (συναρτήσει του n ή ανεξάρτητα από αυτό) το πλήθος όλων των δυνατών διαδρομών που μπορούμε να ακολουθήσουμε, με σκοπό να καταλήξουμε στα σημεία B, Γ, Δ, E , όπου n ακέραιος μεγαλύτερος του 3.

Διάρκεια εξέτασης 4 ώρες.

Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Καλή επιτυχία!