ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
29η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
3 Μαρτίου 2012

Θέματα μικρών τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (με $\text{ΑΒ} < \text{ΑΓ} < \text{ΒΓ}$), εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(\text{O}, R)$ (με κέντρο το σημείο O και ακτίνα R). Ο κύκλος $c_1(\text{A}, \text{AB})$ (με κέντρο το σημείο A και ακτίνα AB) τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ και τον περιγεγραμμένο κύκλο $c(\text{O}, R)$ στο σημείο E. Να αποδείξετε ότι η πλευρά ΑΓ διχοτομεί τη γωνία $\Delta\hat{\text{A}}\text{E}$.

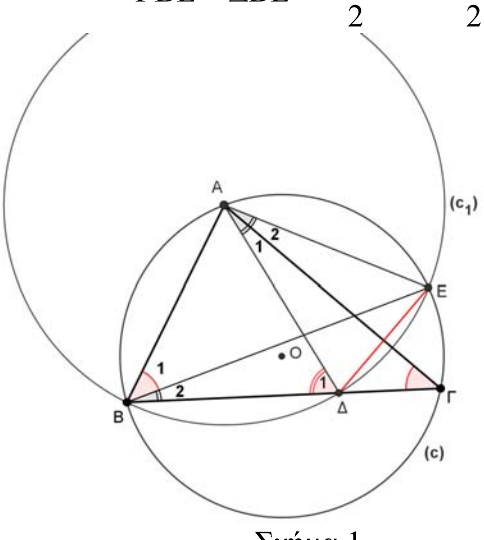
Λύση (1ος τρόπος)

Οι γωνίες $\Gamma\hat{\text{A}}\text{E}$ και $\Gamma\hat{\text{B}}\text{E}$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο $c(\text{O}, R)$ (σχήμα 1) και βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{\Gamma\text{E}}$, οπότε είναι ίσες, δηλαδή έχουμε

$$\hat{\text{A}}_2 = \Gamma\hat{\text{A}}\text{E} = \Gamma\hat{\text{B}}\text{E}. \qquad (1)$$

Επίσης, η γωνία $\Delta\hat{\text{B}}\text{E}$ που είναι ίση με τη γωνία $\Gamma\hat{\text{B}}\text{E}$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο $c_1(\text{A}, \text{AB})$ και βάνει στο τόξο $\overset{\frown}{\Delta\text{E}}$, ενώ η γωνία $\Delta\hat{\text{A}}\text{E}$ είναι η αντίστοιχη επίκεντρη της γωνίας $\Delta\hat{\text{B}}\text{E}$. Επομένως έχουμε

$$\Gamma\hat{\text{B}}\text{E} = \Delta\hat{\text{B}}\text{E} = \frac{\Delta\hat{\text{A}}\text{E}}{2} = \frac{\hat{\text{A}}_1 + \hat{\text{A}}_2}{2}. \qquad (2)$$



Σχήμα 1

Από τις σχέσεις (1) και (2) λαμβάνουμε

$$\hat{A}_2 = \frac{\hat{A}_1 + \hat{A}_2}{2}, \qquad (3)$$

από την οποία προκύπτει ότι $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, δηλαδή η ΑΓ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{A}E$.

2^{ος} τρόπος

Οι χορδές ΑΒ και ΑΕ του κύκλου *(c)* είναι ίσες μεταξύ τους, ως ακτίνες του κύκλου (c_1), οπότε το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές με

$$\hat{B}_1 = A\hat{B}E = A\hat{E}B. \qquad (3)$$

Όμως οι γωνίες $A\hat{E}B$ και $\hat{\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο $c(O, R)$ και βαίνουν στο ίδιο τόξο, οπότε θα είναι ίσες, δηλαδή

$$A\hat{E}B = \hat{\Gamma}. \qquad (4)$$

Από τις (3) και (4), έχουμε

$$\hat{B}_1 = A\hat{B}E = \hat{\Gamma} \qquad (5)$$

και επομένως προκύπτει ότι

$$\hat{B}_2 = \hat{B} - \hat{B}_1 = \hat{B} - \hat{\Gamma}. \qquad (6)$$

Από το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Delta$, έχουμε: $\hat{\Delta}_1 = A\hat{\Delta}B = \hat{B}$ και επειδή η $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου $A\Delta\Gamma$, συμπεραίνουμε ότι:

$$\hat{B} = \hat{\Delta}_1 = \Delta\hat{A}\Gamma + \hat{\Gamma} = \hat{A}_1 + \hat{\Gamma}$$

$$\Rightarrow \hat{A}_1 = \Delta\hat{A}\Gamma = \hat{B} - \hat{\Gamma}. \qquad (7)$$

Από τις σχέσεις (6) και (7) λαμβάνουμε την ισότητα:

$$\hat{A}_1 = \hat{B}_2. \qquad (8)$$

Επιπλέον, οι γωνίες $\hat{B}_2$ και $\Gamma\hat{A}E = \hat{A}_2$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο $c(O, R)$ και βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{\Gamma E}$, οπότε είναι ίσες, δηλαδή

$$\hat{A}_2 = \Gamma\hat{A}E = \Gamma\hat{B}E = \hat{B}_2. \qquad (9)$$

Από τις σχέσεις (7), (8) και (9) λαμβάνουμε την ισότητα $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{B} - \hat{\Gamma}$, από την οποία προκύπτει ότι η πλευρά ΑΓ διχοτομεί τη γωνία $\Delta\hat{A}E$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$, να λύσετε την εξίσωση

$$\left|\left|x-4\right| - 2x + 8\right| = ax + 4.$$

Λύση

Με σκοπό την απαλλαγή από την απόλυτη τιμή του $x-4$, θεωρούμε τις περιπτώσεις:

Ι. $x \geq 4$. Τότε έχουμε $|x-4| = x-4$ και η εξίσωση γίνεται:

$$|x-4-2x+8| = ax+4 \Leftrightarrow |-(x-4)| = ax+4 \Leftrightarrow |x-4| = ax+4$$

$$\Leftrightarrow x-4 = ax+4 \Leftrightarrow (1-a)x = 8,$$

οπότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Για $a = 1$ η εξίσωση γίνεται: $0 \cdot x = 8$ και είναι αδύνατη.

- Για $a \neq 1$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση $x = \frac{8}{1-a}$, μόνον όταν
$$\frac{8}{1-a} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{2}{1-a} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1+a}{1-a} \geq 0 \Leftrightarrow (a+1)(a-1) \leq 0, a \neq 1 \Leftrightarrow -1 \leq a < 1.$$
Για $a < -1$ ή $a \geq 1$ η εξίσωση δεν έχει λύση μεγαλύτερη ή ίση του 4.

II. $x < 4$. Τότε έχουμε $|x-4| = -x+4$ και η εξίσωση γίνεται:
$$|-x+4-2x+8| = ax+4 \Leftrightarrow |-3(x-4)| = ax+4 \Leftrightarrow |3(x-4)| = ax+4$$
$$\Leftrightarrow -3x+12 = ax+4 \Leftrightarrow (a+3)x = 8,$$
οπότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Για $a = -3$ η εξίσωση γίνεται: $0 \cdot x = 8$ και είναι αδύνατη.
- Για $a \neq -3$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση $x = \frac{8}{a+3}$, μόνον όταν
$$\frac{8}{a+3} < 4 \Leftrightarrow \frac{2}{a+3} < 1 \Leftrightarrow \frac{-a-1}{a+3} < 0$$
$$\Leftrightarrow (a+3)(a+1) > 0,\ a \neq -3 \Leftrightarrow a < -3 \text{ ή } a > -1.$$
Για $-3 < a \leq -1$ η εξίσωση δεν έχει λύση μικρότερη του 4.

Συνοψίζοντας, όλα τα παραπάνω έχουμε ότι:

- Για $a < -3$, η εξίσωση έχει μία μόνο λύση $x = \frac{8}{a+3}$.
- Για $-3 \leq a < -1$, η εξίσωση δεν έχει λύση.
- Για $a = -1$, η εξίσωση έχει μία μόνο λύση $x = \frac{8}{1-a}$.
- Για $-1 < a < 1$, η εξίσωση έχει δύο λύσεις $x = \frac{8}{1-a}$ και $x = \frac{8}{a+3}$.
- Για $a \geq 1$, η εξίσωση έχει μία μόνο λύση $x = \frac{8}{a+3}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Οι θετικοί ακέραιοι m, n, με $m > n$, ικανοποιούν την εξίσωση
$$\text{ΕΚΠ}\{m,n\} + \text{ΜΚΔ}\{m,n\} = m+n. \qquad (*)$$
(α) Να αποδείξετε ότι ο n είναι διαιρέτης του m.

(β) Αν επιπλέον ισχύει ότι $m - n = 10$, να προσδιορίσετε όλα τα ζευγάρια (m,n) που είναι λύσεις της εξίσωσης (*).

Λύση

(α) Έστω ότι $\text{ΜΚΔ}\{m,n\} = d$. Τότε υπάρχουν θετικοί ακέραιοι a,b τέτοιοι ώστε:
$$m = ad,\ n = bd \text{ και } \text{ΜΚΔ}\{a,b\} = 1.$$
Τότε θα ισχύει ότι $\text{ΕΚΠ}\{m,n\} = \frac{mn}{d} = \frac{adbd}{d} = abd$ και η εξίσωση (*) γίνεται:
$$abd + d = ad + bd \Leftrightarrow d(ab+1-a-b) = 0,$$
από την οποία, αφού $d \geq 1$, προκύπτει ότι:

$$ab+1-a-b=0 \Leftrightarrow (a-1)(b-1)=0 \Leftrightarrow a=1 \text{ ή } b=1.$$

- Αν είναι $a=1$, τότε $m=d$ και $n=bd \geq d=m$, άτοπο.
- Αν είναι $b=1$, τότε $n=d$ και $m=ad$, οπότε προκύπτει ότι $n|m$.

(β) Σύμφωνα με το ερώτημα (α), έχουμε $n=d$ και $m=ad$, με $a>1$, αφού $m>n$, οπότε

$$m-n=10 \Leftrightarrow ad-d=10 \Leftrightarrow (a-1)d=10.$$

Επειδή οι αριθμοί $a-1, d$ είναι θετικοί ακέραιοι, έπεται ότι

$$(a-1,d) \in \{(1,10),(2,5),(5,2),(10,1)\} \Leftrightarrow (a,d) \in \{(2,10),(3,5),(6,2),(11,1)\},$$

οπότε λαμβάνουμε τα ζευγάρια

$$(m,n)=(20,10) \text{ ή } (15,5) \text{ ή } (12,2) \text{ ή } (11,1).$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Πάνω σε επίπεδο Π δίνεται ευθεία ε και πάνω στην ε δίνονται δύο σημεία A_1, A_2, διαφορετικά μεταξύ τους. Θεωρούμε ακόμη και δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία $\mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4$ του επιπέδου Π που δεν ανήκουν στην ευθεία ε. Να εξετάσετε, αν είναι δυνατόν να τοποθετηθούν τα σημεία A_3 και A_4 σε τέτοιες θέσεις, ώστε να σχηματίζεται ο μεγαλύτερος δυνατός αριθμός ισοσκελών τριγώνων με κορυφές τρία από τα τέσσερα σημεία $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4$:

(α) όταν τα σημεία $\mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4$ ανήκουν σε διαφορετικά ημιεπίπεδα ως προς την ευθεία ε,

(β) όταν τα σημεία A_3, A_4 ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ε.

Να δώσετε όλες τις δυνατές περιπτώσεις και σε κάθε περίπτωση να εξηγήσετε πως μπορούν να προσδιοριστούν γεωμετρικά τα σημεία A_3 και A_4.

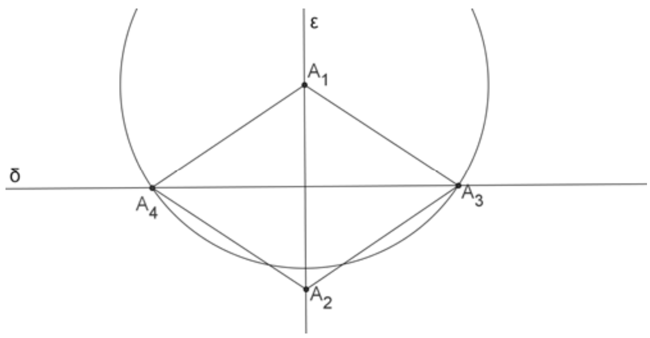
Λύση

Πρώτα παρατηρούμε ότι από τέσσερα σημεία που ανά τρία είναι μη συνευθειακά, ορίζονται συνολικά $\binom{4}{3}=\frac{4!}{3!\cdot 1!}=4$ διαφορετικά τρίγωνα. Επομένως, ο μέγιστος δυνατός αριθμός ισοσκελών τριγώνων που μπορεί να οριστούν με κορυφές τρία από τα από τα τέσσερα σημεία είναι 4. Στη συνέχεια, για τις περιπτώσεις (α) και (β), θα προσπαθήσουμε να τοποθετήσουμε τα σημεία A_3 και A_4 σε τέτοιες θέσεις, έτσι ώστε να ορίζονται τέσσερα ισοσκελή τρίγωνα από τα σημεία $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3$ και A_4. Για τον ορισμό ισοσκελούς τριγώνου με δύο κορυφές A_1 και A_2 υπάρχουν δύο δυνατές περιπτώσεις σε σχέση με τη βάση και τις ίσες πλευρές. Στη πρώτη περίπτωση η $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ είναι βάση, ενώ στη δεύτερη περίπτωση η $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ είναι μία από τις ίσες πλευρές. Έχοντας στο νου μας αυτές τις δύο δυνατότητες, προσπαθούμε στη συνέχεια να κατασκευάσουμε ισοσκελή τρίγωνα με κορυφές τρία από τα τέσσερα σημεία $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3$ και A_4.

(α) *Τα σημεία $\mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4$ ανήκουν σε διαφορετικά ημιεπίπεδα ως προς την ευθεία ε.*

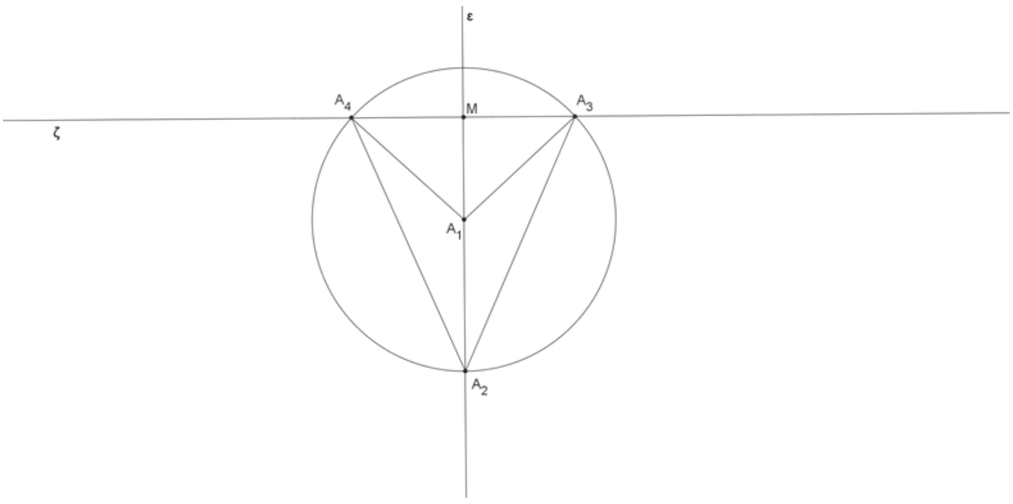
Για τον ορισμό ισοσκελούς τριγώνου με δύο κορυφές A_1 και A_2 υπάρχουν οι παρακάτω δυνατές περιπτώσεις:

- Η πρώτη περίπτωση είναι τα σημεία A_3 και A_4 να ανήκουν στη μεσοκάθετη δ του ευθύγραμμου τμήματος A_1A_2 και σε διαφορετικά ημιεπίπεδα ως προς την ευθεία ε. Τότε ορίζονται τα ισοσκελή τρίγωνα $A_1A_2A_3$ και $A_1A_2A_4$. Αν επιπλέον το σημείο A_4 είναι η τομή της μεσοκάθετης δ με τον κύκλο $c\left(A_1, A_1A_3\right)$, τότε θα είναι $A_1A_3 = A_1A_4$, αλλά και $A_2A_3 = A_2A_4$ (λόγω συμμετρίας), οπότε και τα τρίγωνα $A_1A_3A_4$ και $A_2A_3A_4$ είναι ισοσκελή, σχήμα 2.



Σχήμα 2

- Η δεύτερη περίπτωση είναι γενίκευση της πρώτης. Τα σημεία A_3 και A_4 λαμβάνονται συμμετρικά ως προς την ευθεία ε, πάνω σε τυχούσα ευθεία ζ κάθετη προς την ευθεία ε, όχι στα σημεία A_1, A_2, αλλά και πάνω στον κύκλο $c\left(A_1, A_1A_2\right)$, ώστε να εξασφαλίζονται οι ισότητες $A_1A_2 = A_1A_3 = A_1A_4$ και $A_1A_4 = A_1A_3$, $A_2A_4 = A_2A_3$, αφού η ευθεία ε είναι μεσοκάθετη της χορδής A_3A_4, σχήμα 3.



Σχήμα 3

- Στη περίπτωση αυτή υποθέτουμε ότι η A_1A_2 είναι βάση στο τρίγωνο $A_1A_2A_3$ και μία από τις ίσες πλευρές στο τρίγωνο $A_1A_2A_4$, σχήμα 4. Τα ισοσκελή τρίγωνα $A_1A_2A_3$ και $A_1A_4A_3$, αλλά και τα $A_1A_2A_4$ και $A_2A_4A_3$ είναι ίσα, γιατί έχουν τις τρεις πλευρές τους ίσες μία προς μία, $A_4A_1 = A_1A_2 = A_3A_2$ και $A_4A_3 = A_4A_2 = A_1A_2$. Άρα έχουμε και τις ισότητες των γωνιών:

$$\theta = \omega \text{ και } \varphi = x. \qquad (1)$$

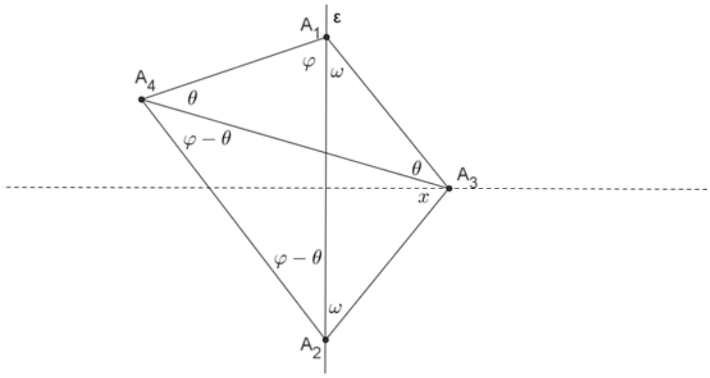
Από το τρίγωνο $A_1A_3A_4$ προκύπτει η ισότητα:

$$\varphi+\omega+2\theta=180^0 \text{ ή } \varphi+3\theta=180^0, \qquad (2)$$

ενώ από το τρίγωνο $A_2A_3A_4$ προκύπτει η ισότητα

$$2(\varphi-\theta)+x+\omega=180^0 \Rightarrow 3\varphi-\theta=180^0 . \qquad (3)$$

Από τις (2) και (3) λαμβάνουμε: $\varphi=72^0$ και $\theta=36^0$.

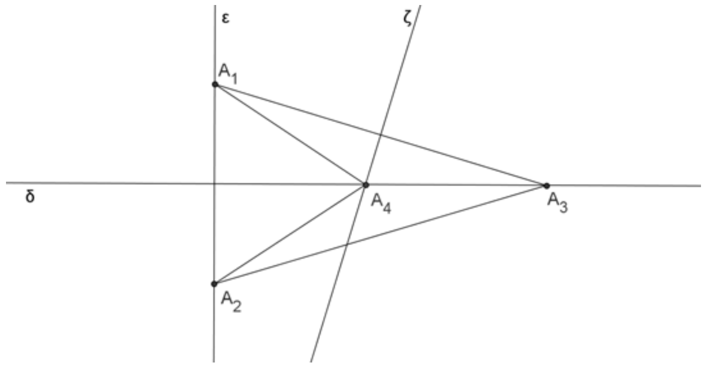


Σχήμα 4

(β) *Τα σημεία* A_3, A_4 *ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία* ε.

Έχουμε τρεις δυνατές περιπτώσεις:

- Το σημείο A_3 ανήκει στη μεσοκάθετη δ του ευθύγραμμου τμήματος A_1A_2 και το σημείο A_4 λαμβάνεται ως η τομή των μεσοκάθετων δ και ζ των ευθύγραμμων τμημάτων A_1A_2 και A_1A_3, αντίστοιχα. Τότε και τα τέσσερα τρίγωνα που ορίζονται από τα σημεία A_1, A_2, A_3 και A_4 είναι ισοσκελή.



Σχήμα 5

Για να ανήκει το σημείο A_4 στο ίδιο ημιεπίπεδο με το σημείο A_3 θα πρέπει το τρίγωνο $A_1A_2A_3$ να είναι οξυγώνιο, σχήμα 5.

- Τα σημεία A_3 και A_4 λαμβάνονται έτσι ώστε το τετράπλευρο $A_1A_2A_3A_4$ να είναι ρόμβος (ή τετράγωνο), δηλαδή πρέπει για το τετράγωνο να ισχύουν

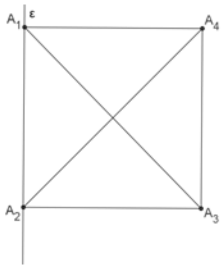
$$A_1A_2=A_1A_4=A_2A_3 \text{ και } A_1A_2\perp A_1A_4,\ A_1A_2\perp A_2A_3, \text{ σχήμα 6,}$$

ενώ για το ρόμβο πρέπει να ισχύουν

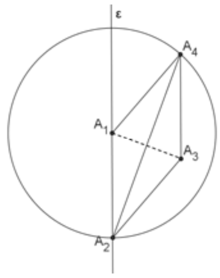
$$A_1A_2=A_1A_4=A_2A_3=A_2A_4, \text{ σχήμα 7.}$$

Στην περίπτωση αυτή ορίζουμε πρώτα το σημείο A_4 πάνω στο κύκλο $c(A_1, A_1A_2)$ έτσι ώστε $A_1A_2=A_1A_4$ και στη συνέχεια θεωρούμε το σημείο A_3 συμμετρικό του A_1 ως προς την ευθεία A_2A_4.

Με τον ίδιο τρόπο μπορούν να θεωρηθούν τα σημεία A_3 και A_4 στο άλλο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ε.

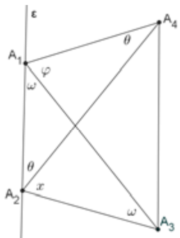


Σχήμα 6

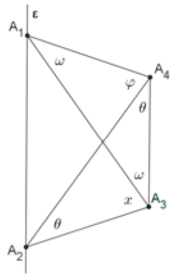


Σχήμα 7

- Στην περίπτωση αυτή υποθέτουμε ότι έχουμε ορίσει τα σημεία A_3 και A_4 σε ένα από τα δύο ημιεπίπεδα, έτσι ώστε να σχηματίζονται από αυτά τέσσερα ισοσκελή τρίγωνα, σχήμα 8 και 9. Εργαζόμενοι όπως στην τρίτη υποπερίπτωση του (α), λαμβάνουμε τις ισότητες $\omega = \theta = 36^0$ και $\varphi = x = 72^0$.



Σχήμα 8

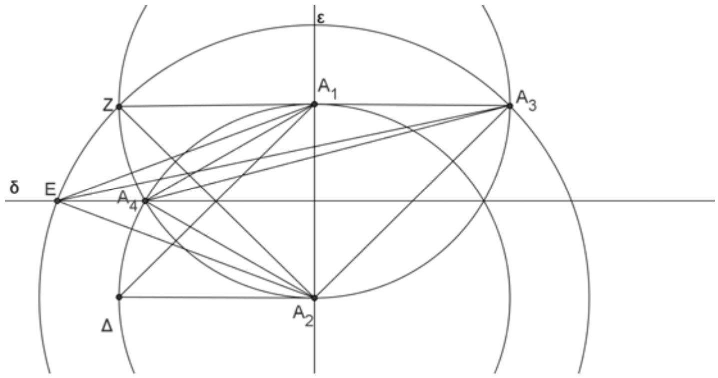


Σχήμα 9

Παρατηρήσεις

1. Σε καθεμία από τις δύο περιπτώσεις έχουμε ισοσκελές τραπέζιο $A_1A_2A_3A_4$ του οποίου οι δύο ίσες πλευρές ισούνται με τη μικρή βάση του. Οι τρεις ίσες πλευρές του ισοσκελούς τραπεζίου $A_1A_2A_3A_4$ αντιστοιχούν σε πλευρές κανονικού πενταγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο που περνάει από τρεις κορυφές του, σχήματα 9 και 10. Αντίστοιχη παρατήρηση μπορεί να γίνει για την τρίτη υποπερίπτωση του (α), σχήμα 4.

2. Στην περίπτωση (α) θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε το σημείο A_3 σε τέτοια θέση, ώστε να ισχύουν: $A_1A_3 = A_1A_2$ και $A_1A_3 \perp A_1A_2$, οπότε το τρίγωνο $A_1A_2A_3$ είναι ισοσκελές και ορθογώνιο, σχήμα 10. Στη συνέχεια το σημείο A_4 πρέπει να τοποθετηθεί σε διαφορετικό ημιεπίπεδο σε σχέση με το A_3. Οι πιθανές θέσεις του φαίνονται στο σχήμα 10, αλλά στις τρεις περιπτώσεις ορίζονται τρία ακριβώς ισοσκελή τρίγωνα και στην τέταρτη με $A_4 \equiv \Delta$ μόνο δύο. Επομένως σε αυτή την περίπτωση δεν επιτυγχάνεται ο ορισμός του μέγιστου δυνατού αριθμού ισοσκελών τριγώνων.



Σχήμα 10

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
29η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
3 Μαρτίου 2012

Θέματα μεγάλων τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Οι θετικοί ακέραιοι p, q είναι πρώτοι μεταξύ τους και ικανοποιούν την εξίσωση
$$p+q^2=\left(n^2+1\right)p^2+q,$$
όπου η παράμετρος n είναι θετικός ακέραιος. Βρείτε όλα τα δυνατά ζεύγη $\left(p,q\right)$.

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση
$$q\left(q-1\right)=p\left[\left(n^2+1\right)p-1\right]. \qquad (1)$$
Επειδή είναι ΜΚΔ$\left\{p,q\right\}=1$, από την (1) έπεται ότι $p\left|q-1\right.$, $q\left|\left(n^2+1\right)p-1\right.$ και
$$\frac{q-1}{p}=\frac{\left(n^2+1\right)p-1}{q}=k, \qquad (2)$$
όπου k θετικός ακέραιος. Από τις εξισώσεις (2) λαμβάνουμε
$$q=kp+1 \text{ και } p=\frac{k+1}{n^2+1-k^2}. \qquad (3)$$
Επειδή ο p είναι θετικός ακέραιος, από την (3) έπεται ότι**:**
$$0<n^2+1-k^2\le k+1 \Rightarrow k^2<n^2+1\le k^2+k+1$$
$$\Rightarrow k^2-1<n^2\le k^2+k \Rightarrow k^2\le n^2\le k^2+k<\left(k+1\right)^2,$$
οπότε προκύπτει ότι $k=n$. Έτσι από τις σχέσεις (3) λαμβάνουμε:
$$p=\frac{n+1}{n^2+1-n^2}=n+1 \text{ και } q=n\left(n+1\right)+1=n^2+n+1.$$
Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το ζευγάρι $\left(p,q\right)=\left(n+1,\,n^2+n+1\right)$ επαληθεύει τη δεδομένη εξίσωση και ότι ισχύει: ΜΚΔ$\left\{p,q\right\}=1$. Πράγματι, αν είναι ΜΚΔ$\left\{p,q\right\}=d$, τότε $d\left|(q-np)=1\right.$, οπότε θα είναι $d=1$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Να προσδιορίσετε όλα τα μη μηδενικά πολυώνυμα $P\left(x\right)$ και $Q\left(x\right)$ με πραγματικούς συντελεστές, ελαχίστου δυνατού βαθμού, τέτοια ώστε
$$P\left(x^2\right)+Q\left(x\right)=P\left(x\right)+x^5Q\left(x\right), \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Λύση

Η δεδομένη ισότητα γράφεται ισοδύναμα

$$P\left(x^2\right)-P(x)=\left(x^5-1\right)Q(x),\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}. \qquad (1)$$

Το πολυώνυμο του δεύτερου μέλους έχει μεταξύ των ριζών του τις ρίζες πέμπτης τάξεως της μονάδας: $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$, όπου $\omega=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$, για τις οποίες ισχύει ότι: $\omega^5=1$ και $\omega^6=\omega,\ \omega^8=\omega^3$.

Από την (1) λαμβάνουμε

$$P(\omega)=P\left(\omega^2\right), P\left(\omega^2\right)=P\left(\omega^4\right), P\left(\omega^3\right)=P\left(\omega^6\right)=P(\omega), P\left(\omega^4\right)=P\left(\omega^8\right)=P\left(\omega^3\right),$$

οπότε θα έχουμε

$$P(\omega)=P\left(\omega^2\right)=P\left(\omega^3\right)=P\left(\omega^4\right).$$

Αν b είναι η κοινή τιμή των $P(\omega), P\left(\omega^2\right), P\left(\omega^3\right)$ και $P\left(\omega^4\right)$, τότε το πολυώνυμο $P(x)-b$ έχει ρίζες τους αριθμούς $\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$, οπότε θα ισχύει:

$$P(x)-b=(x-\omega)\left(x-\omega^2\right)\left(x-\omega^3\right)\left(x-\omega^4\right)R(x)$$
$$\Leftrightarrow P(x)=\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)R(x)+b.$$

Επειδή το πολυώνυμο $P(x)$ έχει πραγματικούς συντελεστές πρέπει το ίδιο να ισχύει και για το πολυώνυμο $R(x)$ και επίσης πρέπει $b\in\mathbb{R}$. Επιπλέον, πρέπει το πολυώνυμο $P(x)$ να είναι του ελάχιστου δυνατού βαθμού, έπεται ότι το πολυώνυμο $R(x)$ πρέπει να είναι του ελάχιστου δυνατού βαθμού. Αν είναι $R(x)=0$, οπότε δεν ορίζεται ο βαθμός του, τότε από την (1) προκύπτει ότι $\left(x^5-1\right)Q(x)=0$, από την οποία, δεδομένου ότι ο δακτύλιος $\mathbb{R}[x]$ των πολυωνύμων πραγματικής μεταβλητής δεν έχει μηδενοδιαιρέτες, έπεται ότι $Q(x)=0$, που είναι μη αποδεκτό. Επομένως το πολυώνυμο $R(x)$ πρέπει να είναι μηδενικού βαθμού, δηλαδή σταθερό πολυώνυμο, έστω $R(x)=a\neq 0$. Τότε θα έχουμε

$$P(x)=a\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)+b=a\left(x^4+x^3+x^2+x\right)+c,$$

όπου $a\in\mathbb{R}^*,\ c=a+b\in\mathbb{R}.$

Επομένως, η σχέση (1) γίνεται

$$P\left(x^2\right)-P(x)=\left(x^5-1\right)Q(x)$$
$$\Leftrightarrow a\left(x^8+x^6+x^4+x^2\right)-a\left(x^4+x^3+x^2+x\right)=\left(x^5-1\right)Q(x)$$
$$\Leftrightarrow a\left(x^8-x^3+x^6-x\right)=\left(x^5-1\right)Q(x)$$
$$\Leftrightarrow a\left(x^3+x\right)\left(x^5-1\right)=\left(x^5-1\right)Q(x)$$
$$\Leftrightarrow \left(x^5-1\right)\left[a\left(x^3+x\right)-Q(x)\right]=0.$$

Από την τελευταία ισότητα πολυωνύμων έπεται ότι: $Q(x)=a\left(x^3+x\right),\ a\in\mathbb{R}^*$.

2^{ος} τρόπος

Ο ελάχιστος δυνατός βαθμός του πολυωνύμου του δευτέρου μέλους της (1) είναι 5, ενώ ο βαθμός του πολυωνύμου του πρώτου μέλους είναι άρτιος, οπότε θα έχουμε

$$\min\deg Q(x)=1 \text{ και } \min\deg P(x)=3.$$

Αν υποθέσουμε ότι $P(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$, $a_0,a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}$, $a_3\neq 0$, τότε από τη δεδομένη ισότητα πολυωνύμων λαμβάνουμε

$$P(x^2)-P(x)=(x^5-1)Q(x) \qquad (1)$$

$$\Rightarrow (x^5-1)\Big|P(x^2)-P(x)=a_3x^6+a_2x^4+a_1x^2+a_0-a_3x^3-a_2x^2-a_1x-a_0$$

$$\Rightarrow (x^5-1)\Big|a_3(x^6-x^3)+a_2x^4+a_1x^2-a_2x^2-a_1x$$

$$\Rightarrow (x^5-1)\Big|a_3\left[x(x^5-1)+(x-x^3)\right]+a_2x^4+a_1x^2-a_2x^2-a_1x$$

$$\Rightarrow (x^5-1)\Big|a_3\left[x(x^5-1)\right]+a_2x^4-a_3x^3+(a_1-a_2)x^2+(a_3-a_1)x.$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι $a_2x^4-a_3x^3+(a_1-a_2)x^2+(a_3-a_1)x=0$, οπότε λαμβάνουμε $a_2=a_3=0,\ a_1-a_2=0,\ a_1-a_3=0\Leftrightarrow a_1=a_2=a_3=0$, άτοπο.

Επομένως δεν υπάρχει πολυώνυμο $P(x)$ τρίτου βαθμού τέτοιο, ώστε να ισχύει η δεδομένη ισότητα. Στη συνέχεια θεωρούμε $P(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$, με $a_0,a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}, a_4\in\mathbb{R}^*$. Εργαζόμενοι, όπως παραπάνω, λαμβάνουμε:

$$P(x^2)-P(x)=(x^5-1)Q(x) \qquad (1)$$

$$\Rightarrow (x^5-1)\Big|P(x^2)-P(x)=a_4x^8+a_3x^6+a_2x^4+a_1x^2+a_0-a_4x^4-a_3x^3-a_2x^2-a_1x-a_0$$

$$\Rightarrow (x^5-1)\Big|a_4\left[(x^5-1)x^3+x^3\right]+a_3\left[(x^5-1)x+x\right]+a_2x^4+a_1x^2-a_4x^4-a_3x^3-a_2x^2-a_1x$$

$$\Rightarrow (x^5-1)\Big|(x^5-1)(a_4x^3+a_3x)+(a_2-a_4)x^4+(a_4-a_3)x^3+(a_1-a_2)x^2+(a_3-a_1)x$$

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι

$$(a_2-a_4)x^4+(a_4-a_3)x^3+(a_1-a_2)x^2+(a_3-a_1)x=0\Leftrightarrow a_1=a_2=a_3=a_4\in\mathbb{R}^*,$$

οπότε λαμβάνουμε

$$P(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=a_4(x^4+x^3+x^2+x)+a_0,a_4\in\mathbb{R}^*,a_0\in\mathbb{R}.$$

Στη συνέχεια από τη σχέση (1) προκύπτει ότι:

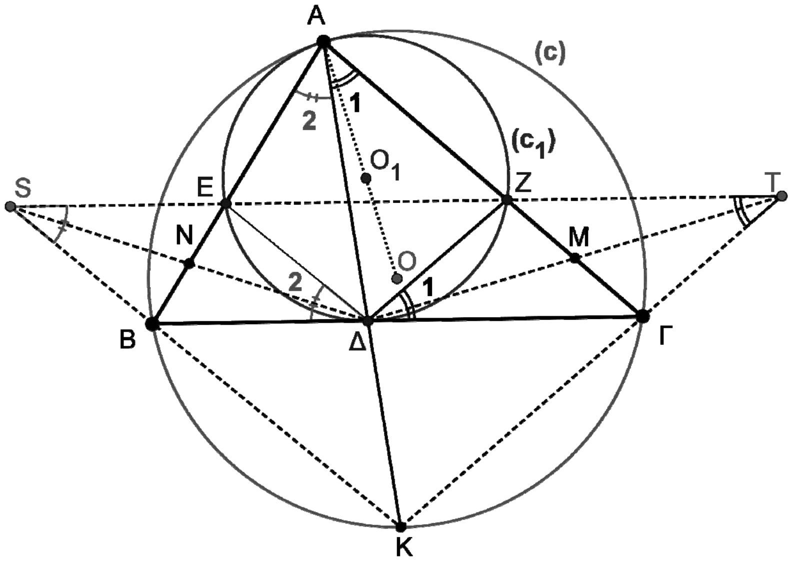
$$P(x^2)-P(x)=(x^5-1)(a_4x^3+a_4x)=(x^5-1)Q(x)\Rightarrow Q(x)=a_4(x^3+x),a_4\in\mathbb{R}^*.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (με $\text{ΑΒ}<\text{ΑΓ}<\text{ΒΓ}$), εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(\text{O},R)$ (με κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα R). Η διχοτόμος ΑΔ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο $c(\text{O},R)$ στο σημείο Κ. Ο κύκλος $c_1(\text{O}_1,R_1)$ (που έχει το κέντρο στην ΟΑ και περνάει από τα σημεία Α, Δ), τέμνει την ΑΒ στο Ε και την ΑΓ στο Ζ. Αν Μ, N είναι τα μέσα των ΖΓ και ΒΕ αντίστοιχα, αποδείξτε ότι οι ευθείες ΕΖ, ΔΜ, ΚΓ περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω Τ), οι ευθείες ΕΖ, ΔΝ, ΚΒ περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω S) και ότι η ΟΚ είναι μεσοκάθετη της TS.

Λύση

Εφόσον το κέντρο του κύκλου c_1 βρίσκεται επάνω στην ΟΑ, οι κύκλοι c και c_1 θα εφάπτονται εσωτερικά στο σημείο Α. Δηλαδή οι κύκλοι c και c_1 είναι ομοιόθετοι στη ομοιοθεσία με κέντρο το σημείο A και λόγο λ (λ είναι ο λόγος των ακτίνων των δύο κύκλων).



Σχήμα 1

Αν λοιπόν κάποια ευθεία περνάει από το σημείο A και τέμνει τους κύκλους c και c_1 στα σημεία Θ και Θ_1 αντίστοιχα, τότε $\mathrm{A}\Theta = \lambda \mathrm{A}\Theta_1$.

Με βάση τις προηγούμενες σκέψεις έχουμε:

Η $\mathrm{B}\Gamma$ είναι ομοιόθετη της EZ, οπότε $\mathrm{B}\Gamma // \mathrm{EZ}$. Η $\mathrm{K}\Gamma$ είναι ομοιόθετη της $\Delta\mathrm{Z}$, οπότε $\mathrm{K}\Gamma // \Delta\mathrm{Z}$. Έστω T το σημείο τομής των EZ και $\mathrm{K}\Gamma$. Τότε το $\Delta\mathrm{ZT}\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο, άρα και η $\Delta\mathrm{M}$ θα περνάει από το σημείο T.

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και το $\Delta\mathrm{ESB}$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι ευθείες EZ, $\Delta\mathrm{N}$, KB περνάνε από το σημείο S.

Εφόσον το O είναι το ομοιόθετο του O_1 και K το ομοιόθετο του Δ, συμπεραίνουμε ότι: $\mathrm{O}_1\Delta // \mathrm{OK}$ και επειδή $\mathrm{OK} \perp \mathrm{B}\Gamma$ (διότι K είναι το μέσο του τόξου $\mathrm{B}\Gamma$), συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{O}_1\Delta \perp \mathrm{B}\Gamma$.

Άρα η $\mathrm{B}\Gamma$ εφάπτεται του κύκλου $c_1(\mathrm{O}_1, R_1)$ στο σημείο Δ.

Εφόσον Δ είναι το σημείο επαφής έχουμε:

$$\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = \hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{A}}_2 = \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}.$$

(οι γωνίες $\hat{\Delta}_1, \hat{\Delta}_2$ σχηματίζονται από χορδή και εφαπτομένη)

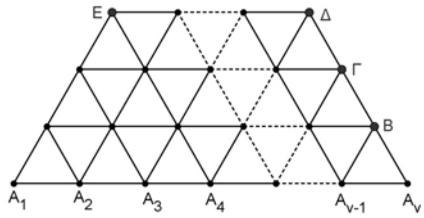
Σε συνδυασμό τώρα με τα παραλληλόγραμμα $\Delta\mathrm{ESB}$ και $\Delta\mathrm{ZT}\Gamma$, έχουμε:

$$\hat{\mathrm{S}} = \hat{\mathrm{T}} = \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}.$$

Άρα το τετράπλευρο $\mathrm{B}\Gamma\mathrm{TS}$ είναι ισοσκελές τραπέζιο και κατά συνέπεια η OK είναι μεσοκάθετη της TS (διότι είναι μεσοκάθετη της βάσης του $\mathrm{B}\Gamma$).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Το ισοσκελές τραπέζιο του σχήματος αποτελείται από ίσα μεταξύ τους ισόπλευρα τρίγωνα που οι πλευρές τους έχουν μήκος 1. Η πλευρά $\mathrm{A}_1\mathrm{E}$ έχει μήκος 3 και η μεγάλη βάση του $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_\nu$ έχει μήκος $\nu - 1$. Ξεκινάμε από το σημείο A_1 και κινούμαστε κατά μήκος των ευθυγράμμων τμημάτων που ορίζονται μόνο προς τα δεξιά και επάνω (λοξά αριστερά ή λοξά δεξιά).

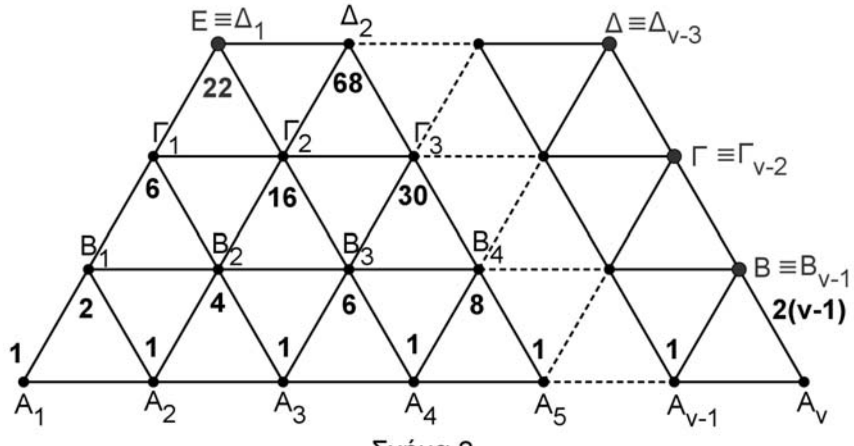


Υπολογίστε (συναρτήσει του ν ή ανεξάρτητα από αυτό) το πλήθος όλων των δυνατών διαδρομών που μπορούμε να ακολουθήσουμε, με σκοπό να καταλήξουμε στα σημεία $\mathrm{B}, \Gamma, \Delta, \mathrm{E}$, όπου ν ακέραιος μεγαλύτερος του 3.

Λύση

Στη μεγάλη βάση του τραπεζίου υπάρχουν τα σημεία $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \ldots, \mathrm{A}_\nu$. Στην επόμενη προς τα άνω γραμμή υπάρχουν τα σημεία $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{B}_3, \ldots, \mathrm{B}_{\nu-1} \equiv \mathrm{B}$. Στην επόμενη προς τα άνω γραμμή υπάρχουν τα σημεία $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots, \Gamma_{\nu-2} \equiv \Gamma$. Στη μικρή τέλος βάση του τραπεζίου υπάρχουν τα σημεία $\mathrm{E} \equiv \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_{\nu-3} \equiv \Delta$.

Θα συμβολίζουμε με μικρά (πεζά) γράμματα το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να προσεγγίσουμε τα αντίστοιχα σημεία (που συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα). Για παράδειγμα, με β_1 συμβολίζουμε το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να προσεγγίσουμε το σημείο B_1.



Σχήμα 2

Προφανώς $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \cdots = \alpha_\nu = 1$, διότι τα αντίστοιχα σημεία μπορούν να προσεγγιστούν με ένα μόνο τρόπο (δεδομένου ότι μπορούμε να κινηθούμε μόνο προς τα δεξιά για την προσέγγισή τους).

Σε κάθε άλλη περίπτωση, οι τρόποι προσέγγισης προκύπτουν από το άθροισμα των τρόπων προσέγγισης σημείων, γειτονικών προς τα αριστερά και προς τα κάτω (κάτω αριστερά και κάτω δεξιά). Έτσι έχουμε:

$$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2,$$

$$\beta_2 = \beta_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_1 + a_2 + \alpha_2 + \alpha_3$$
$$= \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - (\alpha_1 + \alpha_3),$$

$$\beta_3 = \beta_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \alpha_1 + 2a_2 + \alpha_3 + \alpha_3 + \alpha_4$$
$$= \alpha_1 + 2(a_2 + \alpha_3) + \alpha_4 = 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) - (\alpha_1 + \alpha_4),$$

και γενικά λαμβάνουμε

$$\beta_k = 2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{k+1})-(\alpha_1+\alpha_{k+1}) = 2(k+1)-2 = 2k, \ ,$$

για $k=1,2,3,\ldots,(\nu-1)$.

Άρα έχουμε:

$$\boxed{\beta=\beta_{\nu-1}=2(\nu-1)}.$$

Με ανάλογο τρόπο υπολογίζουμε τους τρόπους προσέγγισης των σημείων της τρίτης από κάτω γραμμής και της μικρής βάσης.

$$\begin{aligned}\gamma_i &= 2(\beta_1+\beta_2+\beta_3+\cdots+\beta_{i+1})-(\beta_1+\beta_{i+1}) = \\ &= 2(2+4+\cdots+2(i+1))-(2+2i+2) = \\ &= 4(1+2+\cdots+(i+1))-(4+2i) = \\ &= 2(i+1)(i+2)-2(i+2) = \\ &= 2i(i+2), \qquad i=1,2,3,\ldots,(\nu-2).\end{aligned}$$

Άρα έχουμε:

$$\boxed{\gamma=\gamma_{\nu-2}=2\nu(\nu-2)}.$$

Ομοίως, έχουμε

$$\begin{aligned}\delta_m &= 2(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\cdots+\gamma_{m+1})-(\gamma_1+\gamma_{m+1}) = \\ &= 4\underbrace{\big(1\cdot 3+2\cdot 4+\cdots+(m+1)(m+3)\big)}_{S}-2\big(1\cdot 3+(m+1)(m+3)\big) = \\ &= 4\frac{(m+1)(m+2)(2m+9)}{6}-2\big(1\cdot 3+(m+1)(m+3)\big)=\ldots\ldots.. \\ &= \frac{2}{3}m(2m^2+12m+19), \qquad m=1,2,3,\ldots,(\nu-3)..\end{aligned}$$

Άρα έχουμε:

$$\boxed{\delta=\delta_{\nu-3}=\frac{2}{3}(\nu-3)(2\nu^2+1)}.$$

Απ' ευθείας μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι: $\varepsilon=22$.

<u>Υπολογισμός του αθροίσματος</u>: $S=1\cdot 3+2\cdot 4+\cdots+(m+1)(m+3)$.

Χρησιμοποιώντας την ισότητα $x(x+2)=x^2+2x$ για $x=1, x=2.\ldots, x=m$, έχουμε:

$$\left.\begin{aligned}1\cdot 3 &= 1^2+2\cdot 1\\ 2\cdot 4 &= 2^2+2\cdot 2\\ 3\cdot 5 &= 3^2+2\cdot 3\\ &\vdots\\ m(m+2) &= m^2+2m\end{aligned}\right\}\Rightarrow S_1=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}+2\frac{m(m+1)}{2}=\frac{m(m+1)(2m+7)}{6}.$$

Θέτουμε όπου m το $m+1$ και έχουμε $S=\dfrac{(m+1)(m+2)(2m+9)}{6}$.