



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
30<sup>η</sup> Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"  
23 Φεβρουαρίου 2013  
Θέματα μικρών τάξεων

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1**

(α) Να γράψετε την παράσταση  $A = k^4 + 4$ , όπου  $k$  θετικός ακέραιος, ως γινόμενο δύο παραγόντων που ο καθένας τους να είναι άθροισμα δύο τετραγώνων ακεραίων αριθμών. *Μονάδες 2*

(β) Να απλοποιήσετε την παράσταση

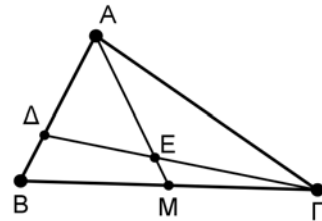
$$K = \frac{\left(2^4 + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(4^4 + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(6^4 + \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left((2n)^4 + \frac{1}{4}\right)}{\left(1^4 + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(3^4 + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(5^4 + \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left((2n-1)^4 + \frac{1}{4}\right)}$$

και να τη γράψετε ως άθροισμα τετραγώνων δύο διαδοχικών θετικών ακεραίων.

*Μονάδες 3*

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2**

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$ , με  $AB < A\Gamma$ . Έστω  $M$  το μέσο της πλευράς  $B\Gamma$ . Στην πλευρά  $AB$  θεωρούμε σημείο  $\Delta$  τέτοιο ώστε, αν το ευθύγραμμο τμήμα  $\Gamma\Delta$  τέμνει τη διάμεσο  $AM$  στο σημείο  $E$ , τότε ισχύει ότι  $A\Delta = \Delta E$ . Να αποδείξετε ότι  $AB = \Gamma E$ . *Μονάδες 5*



**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3**

Έστω  $A = \overline{abcd} = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d$  τετραψήφιος θετικός ακέραιος με ψηφία τέτοια ώστε να ισχύουν:  $a \geq 7$  και  $a > b > c > d > 0$ . Θεωρούμε και τον θετικό ακέραιο  $B = \overline{dcba} = d \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + b \cdot 10 + a$ , που προκύπτει από τον  $A$  με αντίστροφη γραφή των ψηφίων του. Αν δίνεται ότι ο αριθμός  $A+B$  έχει όλα τα ψηφία του περιττά, να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του αριθμού  $A$ .

*Μονάδες 5*

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4**

Να βρείτε όλες τις τριάδες  $(x, y, z)$  θετικών ακεραίων αριθμών που είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{4}{z} = 1.$$

*Μονάδες 5*

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες και 30 λεπτά  
Καλή επιτυχία



**ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ**  
**30<sup>η</sup> Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"**  
**23 Φεβρουαρίου 2013**  
**Θέματα μεγάλων τάξεων**

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1**

Δίνεται η ακολουθία πραγματικών αριθμών  $(a_n)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  με

$$a_1 = 2 \text{ και } a_n = \left( \frac{n+1}{n-1} \right) (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}), \quad n \geq 2.$$

Να προσδιορίσετε τον όρο  $a_{2013}$ .

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2**

Στο σύνολο των ακεραίων να λύσετε την εξίσωση:  $y = 2x^2 + 5xy + 3y^2$ .

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3**

Δίνονται τα σύνολα  $A_1, A_2, \dots, A_{160}$  τέτοια ώστε  $|A_i| = i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 160$ . Με τα στοιχεία των συνόλων αυτών κατασκευάζουμε καινούρια σύνολα  $M_1, M_2, \dots, M_n$  με την ακόλουθη διαδικασία: Στο πρώτο βήμα επιλέγουμε κάποια από τα σύνολα  $A_1, A_2, \dots, A_{160}$  και αφαιρούμε από καθένα από αυτά τον ίδιο αριθμό στοιχείων. Όλα τα στοιχεία που αφαιρούμε αποτελούν τα στοιχεία του συνόλου  $M_1$ . Στο δεύτερο βήμα επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία στα σύνολα που έχουν προκύψει μετά την εφαρμογή του πρώτου βήματος και έτσι ορίζουμε το σύνολο  $M_2$ . Συνεχίζουμε ομοίως μέχρι που να εξαντληθούν όλα τα στοιχεία των συνόλων  $A_1, A_2, \dots, A_{160}$  ορίζοντας έτσι τα σύνολα  $M_3, \dots, M_n$ . Να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή τιμή του αριθμού  $n$ .

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  εγγεγραμμένο σε κύκλο  $c(O, R)$  (με κέντρο το σημείο  $O$  και ακτίνα  $R$ ) και έστω  $\Delta$  τυχόν σημείο της πλευράς  $B\Gamma$  (διαφορετικό από το μέσο της  $B\Gamma$ ). Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου  $BO\Delta$ , έστω  $c_1$ , τέμνει τον κύκλο  $c(O, R)$  στο σημείο  $K$  και την  $AB$  στο σημείο  $Z$ . Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου  $GO\Delta$ , έστω  $c_2$ , τέμνει τον κύκλο  $c(O, R)$  στο σημείο  $M$  και την  $A\Gamma$  στο σημείο  $E$ . Τέλος, ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου  $AEZ$ , έστω  $c_3$ , τέμνει τον κύκλο  $c(O, R)$  στο σημείο  $N$ . Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $KMN$  είναι ίσα.

*Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες και 45 λεπτά.  
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες*

*Καλή επιτυχία*