ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
31η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
22 Φεβρουαρίου 2014

Θέματα μικρών τάξεων

Πρόβλημα 1

Θεωρούμε τρίγωνο ABC και έστω M το μέσο της πλευράς BC. Εξωτερικά του τριγώνου θεωρούμε παραλληλόγραμμο $BCDE$, τέτοιο ώστε: $BE \parallel AM$ και $BE = \frac{AM}{2}$ Να αποδειχθεί ότι η ευθεία EM περνάει από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AD.

Πρόβλημα 2

Έστω p πρώτος και m θετικός ακέραιος. Να προσδιορίσετε όλα τα ζευγάρια (p,m) που ικανοποιούν την εξίσωση

$$p(p+m)+p=(m+1)^3.$$

Πρόβλημα 3

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$x^3=\frac{z}{y}-\frac{2y}{z},\ y^3=\frac{x}{z}-\frac{2z}{x},\ z^3=\frac{y}{x}-\frac{2x}{y}.$$

Πρόβλημα 4.

Βάφουμε τους αριθμούς 1, 2, 3, ...,20 με δύο χρώματα άσπρο και μαύρο έτσι, ώστε να χρησιμοποιούνται και τα δύο χρώματα. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει ο χρωματισμός ώστε το γινόμενο των άσπρων αριθμών και το γινόμενο των μαύρων αριθμών να έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη ίσο με 1;

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες και 30 λεπτά
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
31η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
22 Φεβρουαρίου 2014

Θέματα μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1

Βρείτε όλα τα πολυώνυμα $\mathrm{P}(x)$ με πραγματικούς συντελεστές που ικανοποιούν την ισότητα

$$\left(x^2-6x+8\right)\mathrm{P}(x)=\left(x^2+2x\right)\mathrm{P}(x-2),$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Πρόβλημα 2

Βρείτε τις τιμές του ακέραιου αριθμού n για τις οποίες ο αριθμός $\mathrm{A}=\dfrac{8n-25}{n+5}$ ισούται με τον κύβο ρητού αριθμού.

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε μια $n\times n$ σκακιέρα, όπου n άρτιος θετικός ακέραιος, στην οποία τοποθετούνται όλοι οι αριθμοί $1,2,3,\ldots n^2$, ένας σε κάθε τετραγωνάκι. Καλούμε S_1 το άθροισμα των αριθμών που βρίσκονται στα άσπρα τετράγωνα και S_2 το άθροισμα των αριθμών που βρίσκονται στα μαύρα τετράγωνα. Να βρεθούν όλοι οι αριθμοί n που είναι τέτοιοι, ώστε να είναι δυνατή μία τοποθέτηση, για την οποία ισχύει:

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{39}{64}.$$

Πρόβλημα 4

Δίνεται κύκλος $c(O,R)$ (με κέντρο το σημείο O και ακτίνα R) και δύο σημεία του A,B τέτοια, ώστε $R<AB<2R$. Ο κύκλος $c_1(A,r)$ (με κέντρο το σημείο A και ακτίνα r, $0<r<R$), τέμνει τον κύκλο $c(O,R)$, στα σημεία C και D (το σημείο C ανήκει στο μικρό τόξο AB). Από το σημείο B, θεωρούμε τις εφαπτόμενες BE και BF στον κύκλο $c_1(A,r)$, έτσι ώστε από τα σημεία επαφής E,F, το σημείο E βρίσκεται εκτός του κύκλου $c(O,R)$. Οι ευθείες EC και DF τέμνονται στο σημείο M. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $BCFM$ είναι εγγράψιμο.

Διάρκεια εξέτασης 4 ώρες .
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Καλή επιτυχία!***