ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ

32η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα

"Ο Αρχιμήδης"

28 Φεβρουαρίου 2015

Θέματα μικρών τάξεων

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου $\alpha \in \square$ για τις οποίες η εξίσωση

$$x^2+(\alpha-2)x-(\alpha-1)(2\alpha-3)=0$$

έχει δύο ρίζες, τέτοιες ώστε η μία να ισούται με το τετράγωνο της άλλης.

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη μη αρνητικών ακέραιων (m,n) με $m \geq n$, που είναι τέτοια ώστε ο αριθμός $\mathrm{A}=(m+n)^3$ να διαιρεί τον αριθμό $\mathrm{B}=2n(3m^2+n^2)+8$.

Πρόβλημα 3.

Είναι δυνατόν να τοποθετήσουμε κατάλληλα στο επίπεδο 2014 σημεία, έτσι ώστε με κορυφές από αυτά τα σημεία να κατασκευάσουμε 1006^2 παραλληλόγραμμα εμβαδού 1;

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB} \leq \mathrm{A\Gamma}$ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του $c(\mathrm{O},R)$. Η κάθετη από την κορυφή Α προς την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ την τέμνει στο σημείο Δ.

(α) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$, να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta=\dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$.

(β) Αν ισχύει ότι $\Gamma\Delta=\dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες και 30 λεπτά

Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
32η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
28 Φεβρουαρίου 2015

Θέματα μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες θετικών ακέραιων (x, y, p), όπου p πρώτος, οι οποίες ικανοποιούν την εξίσωση

$$\frac{xy^3}{x+y} = p.$$

Πρόβλημα 2

Έστω $P(x) = ax^3 + (b-a)x^2 - (c+b)x + c$ και $Q(x) = x^4 + (b-1)x^3 + (a-b)x^2 - (c+a)x + c$ πολυώνυμα μεταβλητής x, όπου a, b, c είναι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί και $b > 0$. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει τρεις άνισες πραγματικές ρίζες x_0, x_1, x_2, οι οποίες είναι ρίζες και του πολυωνύμου $Q(x)$, τότε:

(α) Να αποδείξετε ότι: $abc > 28$.

(β) Αν a, b, c είναι μη μηδενικοί ακέραιοι με $b > 0$, ποιες είναι οι δυνατές τιμές τους;

Πρόβλημα 3

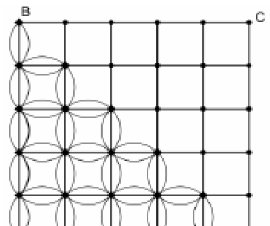
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{B}} = 105^\circ$. Έστω Δ σημείο της πλευράς ΒΓ τέτοιο ώστε $\mathrm{B}\hat{\Delta}\mathrm{A} = 45^\circ$. Να αποδείξετε ότι:

(α) Αν το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, τότε $\hat{\Gamma} = 30^\circ$

(β) Αν $\hat{\Gamma} = 30^\circ$, τότε το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ.

Πρόβλημα 4

Τετράγωνο $ABCD$ διαιρείται σε n^2 ίσα μικρά (στοιχειώδη) τετράγωνα, σχεδιάζοντας ευθείες παράλληλες στις πλευρές του (στο σχήμα φαίνεται η περίπτωση για $n = 5$). Τα σημεία που πλέγματος που βρίσκονται στις πλευρές και το εσωτερικό του τριγώνου ABD συνδέονται μεταξύ τους και με δύο τόξα κύκλων. Ξεκινώντας από το σημείο A, κινούμαστε προς τα δεξιά και προς τα άνω (η κίνηση γίνεται επάνω στα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζουν τα στοιχειώδη τετράγωνα και τα τόξα των κύκλων). Πόσες είναι οι δυνατές διαδρομές από το σημείο A μέχρι το σημείο C;



Διάρκεια εξέτασης 4 ώρες .
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Καλή επιτυχία!***