ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
33η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα «Ο Αρχιμήδης»
27 Φεβρουαρίου 2016

Θέματα μικρών τάξεων

Πρόβλημα 1

Οι θετικοί ακέραιοι p, q και r είναι πρώτοι και έχουν γινόμενο ίσο με n. Αν αυξήσουμε καθέναν από τους p, q κατά 1, τότε το γινόμενο $(p+1)(q+1)r$ είναι ίσο με $n+138$. Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του n.

Πρόβλημα 2

Οι πραγματικοί αριθμοί x, y, z με $x \neq z$ είναι διαφορετικοί από το 0 και ικανοποιούν τις ισότητες

$$(x+y)^2 + (2-xy) = 9$$
$$(y+z)^2 - (3+yz) = 4$$

Να προσδιορίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(\frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2} + \frac{z^3}{x^2 y}\right)\left(\frac{y}{z} + \frac{z^2}{y^2} + \frac{x^3}{y^2 z}\right)\left(\frac{z}{x} + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^3}{z^2 x}\right)$$

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta\,(A\Delta // B\Gamma)$ με $\hat{A} = \hat{B} = 90^0$ και $A\Delta < B\Gamma$. Ονομάζουμε Ε το σημείο τομής των μη παραλλήλων πλευρών ΑΒ και ΓΔ, Ζ το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία ΒΓ και Μ το μέσον της ΕΖ. Αν δίνεται ότι η ευθεία ΓΜ είναι κάθετη στην ευθεία ΔΖ, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΖΓ είναι κάθετη στην ευθεία ΕΓ.

Πρόβλημα 4

Να υπολογίσετε το πλήθος των διατεταγμένων εξάδων $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)$ που μπορούν να δημιουργηθούν, αν οι ακέραιοι $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ παίρνουν τιμές 0, 1 και 2 και το άθροισμα $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6$ είναι άρτιος ακέραιος.

Διάρκεια διαγωνίσματος: 3 ώρες και 30 λεπτά
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες. **Καλή επιτυχία!**

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ

33η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα «Ο Αρχιμήδης»

27 Φεβρουαρίου 2016

Θέματα μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1

Να βρείτε όλες τις τριάδες μη αρνητικών ακεραίων (x,y,z) με $x \le y$, που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$x^2 + y^2 = 3 \cdot 2016^z + 77$$

Πρόβλημα 2

Τα πολυώνυμα $P(x), Q(x)$ με πραγματικούς συντελεστές είναι μη σταθερά, έχουν συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου ίσο με 1 και επιπλέον ικανοποιούν τις ισότητες:

$$2P(x) = Q\left(\frac{(x+1)^2}{2}\right) - Q\left(\frac{(x-1)^2}{2}\right), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \ P(1) = 1.$$

Να βρείτε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές και οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB = A\Gamma$) και το ύψος του $\Gamma\Delta$. Ο κύκλος $c_2(\Gamma, \Gamma\Delta)$ τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο Κ, την προέκταση της $A\Gamma$ στο σημείο Ζ και τον κύκλο $c_1(B, B\Delta)$ στο σημείο Ε. Η ευθεία ΔΖ τέμνει τον κύκλο c_1 στο σημείο Μ.

Να αποδείξετε ότι:

(α) $Z\hat{\Delta}E = 45^0$

(β) Τα σημεία Ε,Μ και Κ βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

(γ) Η ευθεία ΒΜ είναι παράλληλη με την ευθεία ΕΓ.

Πρόβλημα 4

Τετράγωνο ABCD διαιρείται σε n^2 ίσα μικρά (στοιχειώδη) τετράγωνα, σχεδιάζοντας ευθείες παράλληλες στις πλευρές του. Τις κορυφές των στοιχειωδών τετραγώνων τις ονομάζουμε σημεία του πλέγματος. Ένα ρόμβο θα τον ονομάζουμε «καλό», όταν:

- δεν είναι τετράγωνο
- οι κορυφές του είναι σημεία του πλέγματος
- οι διαγώνιές του είναι παράλληλες με τις πλευρές του τετραγώνου ABCD.

Να βρεθεί (συναρτήσει του n) το πλήθος των «καλών» ρόμβων, όπου n ακέραιος αριθμός μεγαλύτερος του 2.

Διάρκεια διαγωνίσματος: 3 ώρες και 30 λεπτά

Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες. **Καλή επιτυχία!**