**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ**
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

**GREEK MATHEMATICAL SOCIETY**
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

# ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
# 35η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
# 3 Μαρτίου 2018

## Θέματα μικρών τάξεων

## Ενδεικτικές λύσεις

**Πρόβλημα 1**

**(α)** Να εξετάσετε, αν υπάρχει πραγματικός αριθμός $x$, τέτοιος ώστε οι αριθμοί $x+\sqrt{3}$ και $x^2+\sqrt{3}$ να είναι και οι δύο ρητοί.

**(β)** Να εξετάσετε, αν υπάρχει πραγματικός αριθμός $y$ τέτοιος ώστε οι αριθμοί $y+\sqrt{3}$ και $y^3+\sqrt{3}$ να είναι και οι δύο ρητοί.

**Λύση**

**(α)** Έστω $x+\sqrt{3}=q,\ x^2+\sqrt{3}=p$ με $p,q\in\mathbb{Q}$. Τότε

$$x=q-\sqrt{3}\Rightarrow x^2=q^2-2q\sqrt{3}+3$$

οπότε αν αντικαταστήσουμε στη δεύτερη παίρνουμε:

$$\left(q^2-2q\sqrt{3}+3\right)+\sqrt{3}=p\Leftrightarrow-\sqrt{3}\left(2q-1\right)=p-q^2-3$$

Τότε πρέπει $2q-1=0\Leftrightarrow q=\frac{1}{2}$. Σε αυτή την περίπτωση $p=q^2+3\Rightarrow q=\frac{1}{4}+3=\frac{13}{4}$ και $x=\frac{1}{2}-\sqrt{3}$.

**(β)** Έστω $y+\sqrt{3}=q,\ y^3+\sqrt{3}=p$ με $p,q\in\mathbb{Q}$. Τότε

$$y=q-\sqrt{3}\Rightarrow y^3=q^3-3q^2\sqrt{3}+9q-3\sqrt{3}$$

οπότε αν αντικαταστήσουμε στη δεύτερη παίρνουμε:

$$\left(q^3-3q^2\sqrt{3}+9q-3\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}=p\Leftrightarrow-\sqrt{3}\left(3q^2+2\right)=p-q^3-9q\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{3}=\frac{q^3+9q-p}{3q^2+2}\in\mathbb{Q}$$

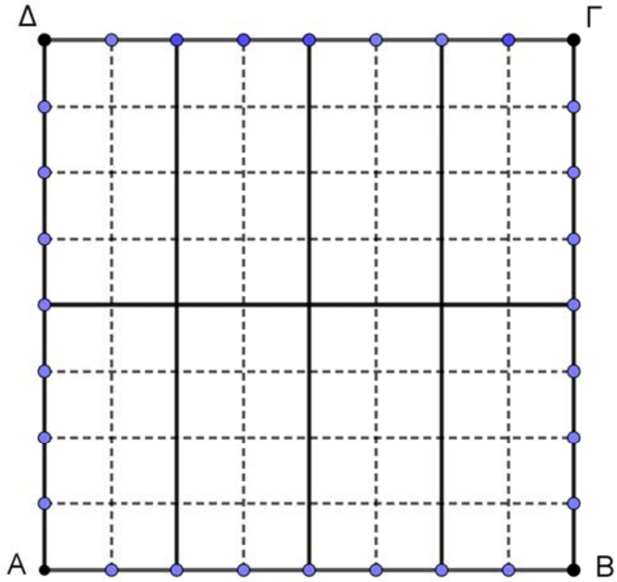
που είναι άτοπο.

**Πρόβλημα 2**

Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 8 cm το οποίο υποδιαιρούμε με ευθείες παράλληλες προς τις πλευρές του σε 64 μικρά τετράγωνα πλευράς 1cm. Χρωματίζουμε 7 μικρά τετράγωνα μαύρα, ενώ όλα τα υπόλοιπα 57 μικρά τετράγωνα είναι λευκά. Υποθέτουμε ότι υπάρχει θετικός ακέραιος $k$ τέτοιος ώστε ανεξάρτητα από τη θέση των 7 μαύρων μικρών τετραγώνων, υπάρχει ορθογώνιο εμβαδού $k$ cm$^2$ με πλευρές παράλληλες στις πλευρές του ΑΒΓΔ και με όλα τα μικρά τετράγωνα από τα οποία αποτελείται να είναι λευκά, που μπορεί να αποκοπεί από το τετράγωνο ΑΒΓΔ. Να βρεθεί η μέγιστη δυνατή τιμή του $k$.

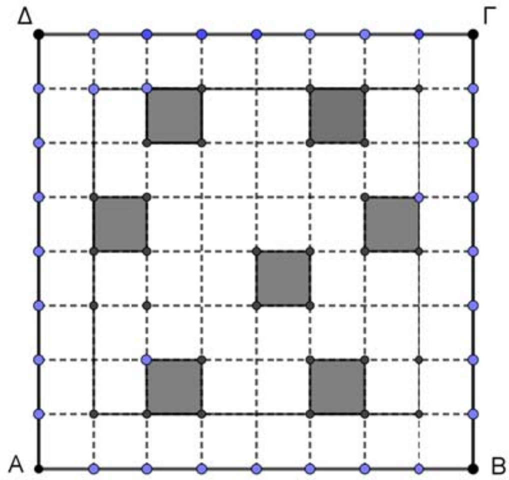
**Λύση**

Μπορούμε να χωρίσουμε το τετράγωνο ΑΒΓΔ σε 8 ορθογώνια $4\times 2$. Έτσι μπορούμε να χρωματίσουμε στα επτά $4\times 2$ ορθογώνια από ένα μαύρο μικρό τετράγωνο, οπότε από την αρχή του Περιστερώνα θα μείνει με λευκά μικρά τετράγωνα τουλάχιστον ένα $4\times 2$ ορθογώνιο εμβαδού $8\,\mathrm{cm}^2$.




Σχήμα 1

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι υπάρχει χρωματισμός των 7 μικρών τετραγώνων έτσι ώστε να μην υπάρχει ορθογώνιο με λευκά τετράγωνα εμβαδού μεγαλύτερου των $8\,\mathrm{cm}^2$. Στο τετράγωνο του παρακάτω σχήματος 2 αφήνουμε όλα τα συνοριακά μικρά τετράγωνα λευκά και στο $6\times 6$ εσωτερικό τετράγωνο χρωματίζουμε 7 μικρά τετράγωνα μαύρα, έτσι ώστε να μην υπάρχει ορθογώνιο με λευκά τετράγωνα εμβαδού μεγαλύτερου των $8\,\mathrm{cm}^2$.




Σχήμα 2

**Σημείωση:** Για το πρώτο κομμάτι της άσκησης μπορούμε να θεωρήσουμε τις 8 γραμμές ή τις 8 στήλες του πίνακα και να κάνουμε το επιχείρημα όπως στην παραπάνω λύση με την αρχή του Περιστερώνα.

**Πρόβλημα 3**

Θεωρούμε τους θετικούς ακεραίους $a, b$ τέτοιους ώστε ο αριθμός

$$\frac{(a+b)^2+4a}{ab}$$

να είναι ακέραιος. Να αποδείξετε ότι αν ο $b$ είναι περιττός, τότε ο $a$ είναι τέλειο τετράγωνο.

**Λύση**

Έστω $\frac{(a+b)^2+4a}{ab}=\kappa\in\mathbb{Z}$. Η τελευταία γράφεται ως

$$(a+b)^2+4a=\kappa ab \quad (1)$$

Θα δείξουμε ότι ο $a$ είναι περιττός. (2) Πράγματι, αν $2\,|\,a$, τότε θα πρέπει $2\,|\,(a+b)^2$, τότε θα πρέπει και ο $b$ να είναι άρτιος, άτοπο. Θεωρούμε τώρα την (1) σαν δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς $b$, στη μορφή:

$$b^2+b(2-\kappa)a+a^2+4a=0$$

Για να έχει αυτή ακέραιες λύσεις, η διακρίνουσά της θα πρέπει να είναι τέλειο τετράγωνο. Έχουμε ότι $\Delta=a^2(\kappa-2)^2-4(a^2+4a)=a(a(\kappa-2)^2-4a-16)$. Επομένως το γινόμενο των $a$, $a(\kappa-2)^2-4a-16$ είναι τέλειο τετράγωνο. Επειδή όμως ο $a$ είναι περιττός είναι πρώτοι μεταξύ τους, οπότε ο καθένας τους θα πρέπει να είναι τέλειο τετράγωνο, άρα ο $a$ είναι τέλειο τετράγωνο.

**2ος τρόπος:**

Έστω $d=(a,b)$ και γράφουμε $a=dx, b=dy$, με $(x,y)=1$. Παρατηρούμε ότι επειδή $d\,|\,b$ και ο $b$ είναι περιττός, θα πρέπει $d$ περιττός. Τότε ο αριθμός

$$\frac{(a+b)^2+4a}{ab}=\frac{d^2(x+y)^2+4dx}{d^2xy}=\frac{d(x+y)^2+4x}{dxy}$$

είναι ακέραιος. Άρα $x\,|\,d(x+y)^2+4x \Rightarrow x\,|\,dy^2$ και επειδή $(x,y)=1$, πρέπει $x\,|\,d$. Επίσης, $d\,|\,d(x+y)^2+4x \Rightarrow d\,|\,4x$ και αφού $d$ περιττός, $d\,|\,x$. Από τις δύο αυτές σχέσεις έχουμε $d=x$, άρα $a=d^2$.

**Πρόβλημα 4**

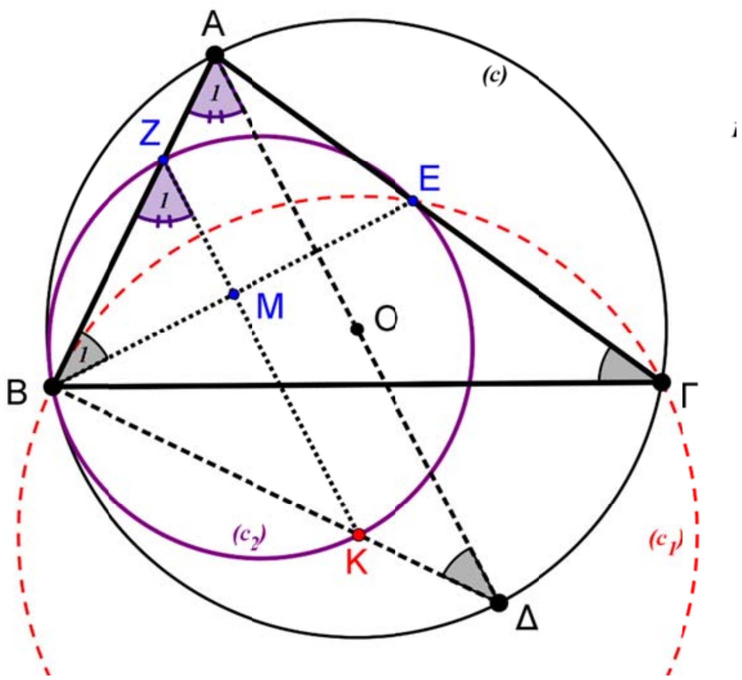
Δίνεται τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{AB}<\mathrm{A\Gamma}<\mathrm{B\Gamma}$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $c$ με κέντρο $O$ και ακτίνα $R$. Ονομάζουμε $\Delta$ το αντιδιαμετρικό της κορυφής $\mathrm{A}$. Δίνεται επίσης ο κύκλος $c_1$ του οποίου το κέντρο $\mathrm{K}$ βρίσκεται επάνω στο τμήμα $\mathrm{B\Delta}$ και περνάει από τα σημεία $\mathrm{B}$ και $\Gamma$. Αν ο κύκλος $c_1$ τέμνει την $\mathrm{A\Gamma}$ στο σημείο $\mathrm{E}$, να αποδείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΒΚΕ, έστω $c_2$, εφάπτεται του περιγεγραμμένου κύκλου $c$.

**Λύση (1$^{ος}$ Τρόπος)**

*Έστω* Ζ η τομή του κύκλου $c_2$ με την ΑΒ και Μ η τομή της ΚΖ με την ΒΕ. Η γωνία $\hat{\text{ΑΒΔ}}$ (άρα και η γωνία $\hat{\text{ΖΒΚ}}$) είναι ορθή διότι βαίνει στη διάμετρο ΑΔ του περιγεγραμμένου κύκλου $c(O,R)$.

Εφόσον $\hat{\text{ΖΒΚ}} = 90°$, η ΖΚ είναι διάμετρος του κύκλου $c_2$ και κατά συνέπεια η ΖΚ θα είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής ΒΕ των κύκλων $c_1$ και $c_2$. Η ΑΒ εφάπτεται στον κύκλο $c_1$, άρα $\hat{\text{Β}}_1 = \hat{\Gamma}$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΜΖ έχουμε:

$$\widehat{Z_1} = 90° - \widehat{\text{B}_1} = 90° - \hat{\Gamma} \quad . \qquad (1)$$




Σχήμα 3

Οι γωνίες $\hat{\Delta}, \hat{\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο $c$ και βαίνουν στο ίδιο τόξο, άρα $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ, έχουμε: $\hat{\text{Α}}_1 = 90° - \hat{\Delta} = 90° - \hat{\Gamma} \quad (2)$.

Από τις ισότητες γωνιών $(1)$ και $(2)$ συμπεραίνουμε ότι: $\widehat{\text{A}_1} = \widehat{Z_1}$, οπότε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ και ΚΖ είναι παράλληλα και κατά συνέπεια το τετράπλευρο $ΑΔΚΖ$ είναι τραπέζιο. Εφόσον το $Ο$ είναι το μέσο της $ΑΔ$, συμπεραίνουμε ότι η $ΟΒ$ θα διέρχεται από το μέσο της $ΚΖ$ που είναι το κέντρο του κύκλου $c_2$. Άρα τα κέντρα των κύκλων $c$, $c_2$ και το σημείο $Β$ θα είναι συνευθειακά.

**Εναλλακτικά, το τελικό συμπέρασμα (που διατυπώνεται στην τελευταία παράγραφο) θα μπορούσε να προκύψει και με τη βοήθεια του μετασχηματισμού της ομοιοθεσίας:**

Από τις ισότητες γωνιών $(1)$ και $(2)$ συμπεραίνουμε ότι: $\hat{A}_1 = \hat{Z}_1$, οπότε τα ευθύγραμμα τμήματα $ΑΔ$ και $ΚΖ$ είναι παράλληλα και κατά συνέπεια ομοιόθετα στην ομοιοθεσία με κέντρο ομοιοθεσίας το σημείο $Β$.

Εφόσον τα τμήματα $ΑΔ$ και $ΚΖ$ ( δηλαδή, οι διάμετροι των κύκλων $c$ και $c_2$) είναι ομοιόθετα με κέντρο ομοιοθεσίας το $Β$ και οι κύκλοι $c$ και $c_2$ θα είναι ομοιόθετοι με το ίδιο κέντρο ομοιοθεσίας. Δηλαδή τα κέντρα των κύκλων $c$, $c_2$ και το σημείο $Β$ θα είναι συνευθειακά.

**2$^{ος}$ τρόπος**

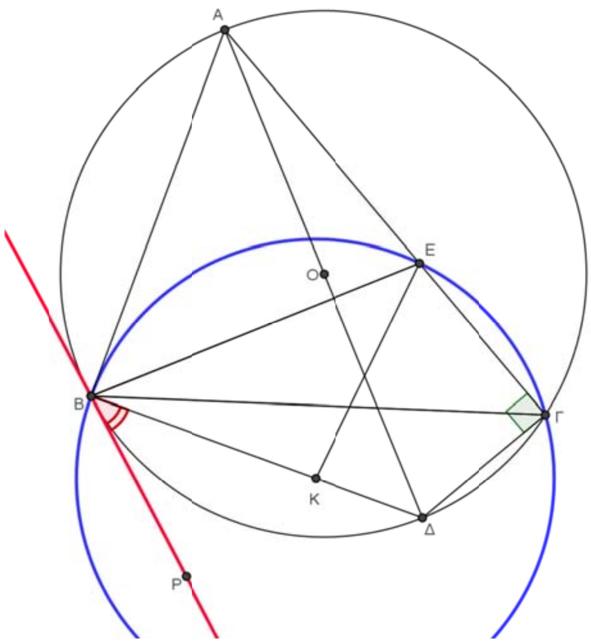
Θα αποδείξουμε ότι ο $c_2$ εφάπτεται του κύκλου $c(O,R)$ στο σημείο $Β$. Για το σκοπό αυτό θα δείξουμε ότι οι δύο αυτοί κύκλοι έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο $Β$. Έστω $ΒΡ$ η εφαπτομένη του $c(O,R)$ στο σημείο $Β$ και ονομάζουμε $\widehat{ΚΒΡ} = \omega$. Για να δείξουμε ότι η $ΒΡ$ είναι εφαπτομένη του $c_2$ στο $Β$, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\widehat{ΒΕΚ} = \omega \,. \qquad (1)$$

Επειδή η $ΒΡ$ η εφαπτομένη του $c(O,R)$, έχουμε ότι $\widehat{ΔΓΒ} = \omega$. Επιπλέον η $ΑΔ$ είναι διάμετρος, οπότε $\widehat{ΑΓΔ} = 90°$, οπότε $\widehat{ΕΓΒ} = 90° - \omega$. Όμως

$$\widehat{ΒΚΕ} = 2\widehat{ΒΓΕ} = 2(90° - \omega) = 180° - 2\omega, \qquad (2)$$

από τη σχέση επίκεντρης εγγεγραμμένης στον $c_1$. Όμως το τρίγωνο $ΒΚΕ$ είναι ισοσκελές επομένως λόγω της (2) θα είναι $\widehat{ΚΒΕ} = \widehat{ΚΕΒ} = \omega$, οπότε η (1) ισχύει και έχουμε το ζητούμενο.



**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ**
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

**GREEK MATHEMATICAL SOCIETY**
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

# ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
# 35η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
# 3 Μαρτίου 2018

## Θέματα μεγάλων τάξεων

## Ενδεικτικές λύσεις

### Πρόβλημα 1

Θεωρούμε την ακολουθία $(x_n),\ n\in\mathbb{N}^*$, που ορίζεται αναδρομικά από τη σχέση $x_{n+1}=3x_n^3+x_n$, με $x_1=\frac{a}{b}$, όπου $a,b$ είναι θετικοί ακέραιοι και ο 3 δεν διαιρεί τον ακέραιο $b$. Αν για κάποιο θετικό ακέραιο $m$ ο $x_m$ είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού, να αποδείξετε ότι και ο $x_1$ είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

**Λύση**

Θα δείξουμε ότι αν ο $x_{n+1}$ είναι τέλειο τετράγωνο ρητού, τότε και ο $x_n$ είναι τέλειο τετράγωνο ρητού, οπότε επαγωγικά θα πάρουμε το ζητούμενο.
Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι αφού ο 3 δεν διαιρεί τον $b$, δεν θα διαιρεί κανέναν παρονομαστή όρου της ακολουθίας.

Από την αναδρομική σχέση έχουμε $x_m=3x_{m-1}^3+x_{m-1}$. Θέτουμε $x_{m-1}=\frac{p}{q}$ όπου ο $q$ δεν διαιρείται με 3 (*) και $(p,q)=1$. Τότε

$$x_m=3x_{m-1}^3+x_{m-1}=\frac{3p^3+pq^2}{q^3}=\frac{p(3p^2+q^2)}{q^3}.$$

Αφού $(p,q)=1$, αυτή είναι η ανάγωγη μορφή του $x_m$. Πράγματι, οι αριθμοί $p(3p^2+q^2)$, $q^3$ είναι πρώτοι μεταξύ τους, αφού αν ένας πρώτος $s$ διαιρεί και τους δύο, τότε $s\mid q^3\Rightarrow s\mid q$ και $s\mid 3p^2+q^2$ τότε $s\mid 3p^2$. Αφού όμως $s$ δεν διαιρεί τον $p$, θα έχουμε $s\mid 3\Rightarrow s=3$, $3\mid q$, άτοπο από την (*).

Από την εκφώνηση ο $x_m$ είναι τέλειο τετράγωνο ρητού, οπότε θα πρέπει ο αριθμητής και ο παρονομαστής να είναι τέλεια τετράγωνα.
Για να είναι ο παρονομαστής τέλειο τετράγωνο, πρέπει ο $q$ να είναι τέλειο τετράγωνο, έστω $q=a^2$. Για να είναι ο αριθμητής τέλειο τετράγωνο, έστω $p(3p^2+q^2)=\kappa^2$, πρέπει και οι δύο παράγοντες να είναι τέλεια τετράγωνα αφού είναι σχετικά πρώτοι.
Πράγματι, αν ένας πρώτος $t$ διαιρεί τον $p$ και τον $3p^2+q^2$, τότε $t\mid q$, που είναι άτοπο αφού $(p,q)=1$.

Έτσι $p=b^2$, $2p^2+q^2=c^2$. Επομένως $x_{m-1}=\frac{p}{q}=\frac{b^2}{a^2}$, άρα ο $x_{m-1}$ είναι τέλειο τετράγωνο ρητού.

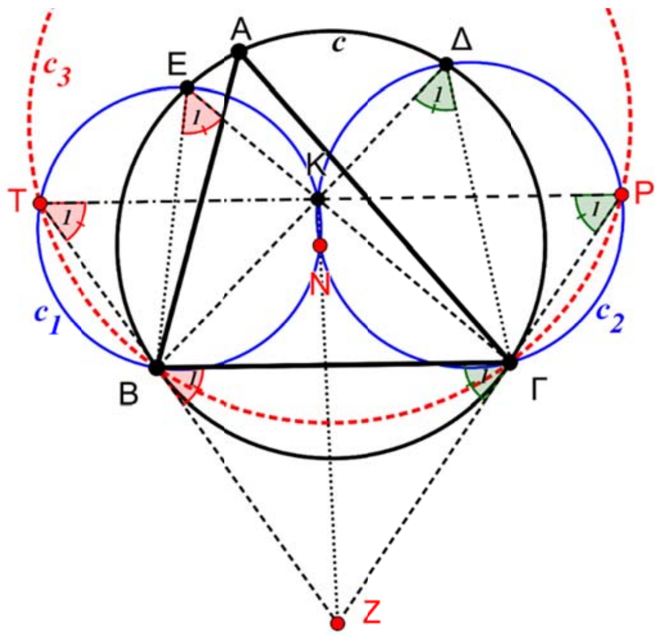
Όμοια τώρα, πηγαίνοντας προς τα πίσω δείχνουμε ότι ο $x_{m-2}$ είναι τέλειο τετράγωνο ρητού, κ.ο.κ μέχρι να φτάσουμε στον $x_1$.

**Πρόβλημα 2**

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ$ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του $c$ με κέντρο $O$ και ακτίνα $R$. Στα μικρά τόξα $ΑΓ$ και $ΑΒ$ θεωρούμε τα σημεία $Δ$ και $Ε$ αντίστοιχα. Έστω $Κ$ είναι το σημείο τομής των $ΒΔ$, $ΓΕ$ και $Ν$ είναι το δεύτερο κοινό σημείο των περιεγραμμένων κύκλων των τριγώνων $ΒΚΕ$, έστω $c_1$, και $ΓΚΔ$ (έστω $c_2$). Να αποδείξετε ότι: τα σημεία $Α, Κ, Ν$ είναι συνευθειακά, αν και μόνο αν, το σημείο $Κ$ ανήκει στη συμμετροδιάμεσο του τριγώνου $ΑΒΓ$, που αντιστοιχεί στην κορυφή $Α$.

***Σημείωση:*** *Συμμετροδιάμεσος τριγώνου είναι η συμμετρική ευθεία της διαμέσου ως προς τη διχοτόμο που περνάει από την ίδια κορυφή με τη διάμεσο*

**Λύση**



Σχήμα 1

**1ος Τρόπος**

Έστω $Κ$ το σημείο τομής των $ΒΔ$, $ΓΕ$ και $Ν$ το δεύτερο κοινό σημείο των κύκλων $c_1$, $c_2$. Έστω ακόμη $Ζ$ το σημείο τομής των εφαπτομένων στα σημεία $Β, Γ$ του κύκλου $c$. Θα αποδείξουμε ότι τα σημεία $Κ, Ν, Ζ$ είναι συνευθειακά.

Σημειώνουμε με $Τ$ τη τομή της $ΒΖ$ με τον $c_1$ και $Ρ$ τη τομή της $ΖΓ$ με τον $c_2$, τότε θα ισχύουν οι παρακάτω ισότητες γωνιών:

$\hat{Ε}_1 = \hat{Τ}_1$ : (εγγεγραμμένες στο κύκλο $c_1$ και βαίνουν στο ίδιο τόξο $ΒΚ$)

$\hat{Ε}_1 = \hat{Β}_1$ : (η $\hat{Β}_1$ δημιουργείτε από τη χορδή $ΒΓ$ και την εφαπτομένη $ΒΖ$ στο κύκλο $c$)

$\hat{Δ}_1 = \hat{Ρ}_1$ : (εγγεγραμμένες στο κύκλο $c_2$ και βαίνουν στο ίδιο τόξο $ΓΚ$)

$\hat{Δ}_1 = \hat{Γ}_1$ : (η $\hat{Γ}_1$ είναι γωνία της χορδής $ΒΓ$ και την εφαπτομένης $ΓΖ$ στο κύκλο $c$)

$\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$: ( οι $ZB$ και $Z\Gamma$ είναι εφαπτόμενες στο κύκλο $c$)

Από τις παραπάνω ισότητες προκύπτουν τα εξής:

$\hat{B}_1 = \hat{T}_1$ , άρα $KT//B\Gamma$ και $\hat{\Gamma}_1 = \hat{P}_1$, άρα $KP//B\Gamma$ .

Επομένως το τετράπλευρο $B\Gamma PT$ είναι ισοσκελές τραπέζιο και κατά συνέπεια εγγράψιμο σε κύκλο (έστω $c_3$).

Άρα η κοινή χορδή $KN$ των κύκλων $c_1$ και $c_2$ θα διέρχεται από το ριζικό κέντρο $Z$ των κύκλων $c_1$, $c_2$, $c_3$.

Αν τώρα υποθέσουμε ότι τα σημεία $A, K, N$ είναι συνευθειακά, τότε (επειδή και τα σημεία $K, N, T$ είναι συνευθειακά) συμπεραίνουμε ότι τα σημεία $A, K, N, T$ είναι συνευθειακά , δηλαδή τα σημεία $A, K, N$ θα ανήκουν στη συμμετροδιάμεσο $AT$ .

Αντίστροφα τώρα, αν υποθέσουμε ότι το σημείο $K$ ανήκει στη συμμετροδιάμεσο $AT$ , τότε τα σημεία $A, K, T$ θα είναι συνευθειακά. Οπότε (επειδή και τα σημεία $K, N, T$ είναι συνευθειακά) συμπεραίνουμε ότι τα σημεία $A, K, N$ είναι συνευθειακά.

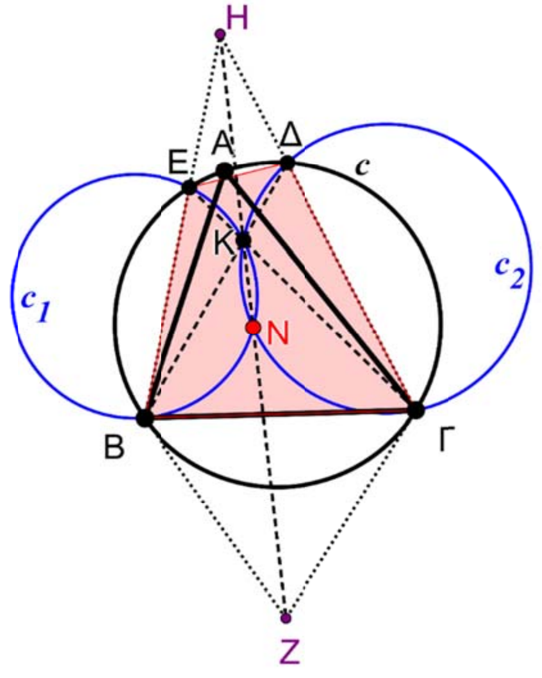
**2ος Τρόπος**

Έστω $K$ το σημείο τομής των $B\Delta$, $\Gamma E$ και $N$ το δεύτερο κοινό σημείο των κύκλων $c_1$, $c_2$. Έστω ακόμη $Z$ το σημείο τομής των εφαπτομένων στα σημεία $B, \Gamma$ του κύκλου $c$. Αν $H$ είναι το σημείο τομής των $EB$ και $\Delta\Gamma$, θα αποδείξουμε ότι τα σημεία $K, N, Z, H$ είναι συνευθειακά.

Από την εφαρμογή του θεωρήματος Pascal στο εκφυλισμένο εξάγωνο $BB\Gamma\Gamma\Delta E$, συμπεραίνουμε ότι τα σημεία $H, K, Z$ είναι συνευθειακά.

Το σημείο $H$ έχει την ίδια δύναμη ως προς το κύκλο $c$. Δηλ. $HE \cdot HB = H\Delta \cdot H\Gamma$ .

Άρα τα σημεία $K, N, H$ είναι συνευθειακά. Οπότε τα σημεία $K, N, Z, H$ είναι συνευθειακά.




Σχήμα 2

Αν τώρα υποθέσουμε ότι τα σημεία $\mathrm{A}, \mathrm{K}, \mathrm{N}$ είναι συνευθειακά, το σημείο $\mathrm{K}$ θα ανήκει στην συμμετροδιάμεσο $\mathrm{AZ}$.

Αντίστροφα, αν το $\mathrm{K}$ ανήκει στην συμμετροδιάμεσο $\mathrm{AZ}$ τότε τα σημεία $\mathrm{A}, \mathrm{K}, \mathrm{N}$ είναι συνευθειακά.

**Πρόβλημα 3**

**(α)** Δίνονται οι φυσικοί αριθμοί $n, m$ με $n < m$ και διακεκριμένοι πραγματικοί αριθμοί $a_1, \ldots, a_m$. Να βρεθούν όλα τα πολυώνυμα $P$ με πραγματικούς συντελεστές, βαθμού το πολύ $n$, για τα οποία ισχύει η ισότητα

$$|P(a_i) - P(a_j)| = |a_i - a_j|, \quad (1)$$

για κάθε $i, j$ με $1 \le i < j \le m$.

**(β)** Δίνονται φυσικοί αριθμοί $m, n \ge 2$ με $n < m$. Να εξετάσετε αν υπάρχει πολυώνυμο $Q$ με πραγματικούς συντελεστές βαθμού $n$ καθώς και διακεκριμένοι πραγματικοί αριθμοί $a_1, \ldots, a_m$, τέτοιοι ώστε

$$|Q(a_i) - Q(a_j)| < |a_i - a_j|,$$

για κάθε $i, j$ με $1 \le i < j \le m$.

**Λύση**

**(α)** Θα ασχοληθούμε πρώτα με το ερώτημα (α). Λόγω της συμμετρίας υποθέτουμε ότι $a_1 > a_2 > \ldots > a_m$ και για ευκολία θέτουμε $d_i = P(a_i) - P(a_{i+1})$. Τότε λόγω της (1) έχουμε:

$$\begin{aligned}
&|d_1| + |d_2| + \ldots + |d_{m-1}| = \\
&= |P(a_1) - P(a_2)| + |P(a_2) - P(a_3)| + \ldots + |P(a_{m-1}) - P(a_m)| \\
&= |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \ldots + |a_{m-1} - a_m| \\
&= a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + \ldots + a_{m-1} - a_m \\
&= a_1 - a_m = |a_1 - a_m| \\
&= |P(a_1) - P(a_m)| = |P(a_1) - P(a_2) + P(a_2) - P(a_3) + \ldots + P(a_{m-1}) - P(a_m)| \\
&= |d_1 + d_2 + \ldots + d_{m-1}|
\end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι οι αριθμοί $d_1, d_2, \ldots, d_{m-1}$ είναι ομόσημοι. Οπότε έχουμε δύο περιπτώσεις.

**1η περίπτωση:** Όλοι οι $d_1, d_2, \ldots, d_{m-1}$ είναι θετικοί. Είναι Τότε από την (1) έχουμε ότι $P(a_1) - P(a_2) = a_1 - a_2 \Rightarrow P(a_1) - a_1 = P(a_2) - a_2$. Όμοια $P(a_2) - a_2 = P(a_3) - a_3, \ldots,$ $P(a_{m-1}) - a_{m-1} = P(a_m) - a_m$. Έπεται ότι

$$P(a_1) - a_1 = P(a_2) - a_2 = \ldots = P(a_m) - a_m = k \quad (2)$$

Αυτό σημαίνει ότι το πολυώνυμο $Q(x) = P(x) - x - k$ που είναι βαθμού το πολύ $n$, έχει $m > n$ διακεκριμένες ρίζες (τα $a_1 > a_2 > \ldots > a_m$). Έπεται ότι το $Q(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο, οπότε $P(x) = x + k$, όπου $k \in \mathbb{R}$.

**2η περίπτωση:** Όλοι οι $d_1, d_2, ..., d_{m-1}$ είναι αρνητικοί. Τότε από την (1) έχουμε ότι $-P(a_1) + P(a_2) = a_1 - a_2 \Rightarrow P(a_1) + a_1 = P(a_2) + a_2$.Επομένως

$$P(a_1) + a_1 = P(a_2) + a_2 = ... = P(a_m) + a_m = \lambda \quad (3)$$

Αυτό σημαίνει ότι το πολυώνυμο $R(x) = P(x) + x - \lambda$ που είναι βαθμού το πολύ $n$, έχει $m > n$ διακεκριμένες ρίζες (τα $a_1 > a_2 > \ldots > a_m$). Έπεται ότι το $R(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο, οπότε $P(x) = -x + \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Επομένως δύο πολυώνυμα, το $P(x) = x + k$ και το $P(x) = -x + \lambda$ είναι τα μόνα που ικανοποιούν τις συνθήκες του προβλήματος.

**2ος τρόπος:** Ας υποθέσουμε ότι $m \geq 3$ και ότι υπάρχουν $p, q, r \in \{a_1, ..., a_m\}$ ώστε να ισχύει:

$$P(p) - P(q) = p - q, \ P(p) - P(r) = r - p \ .$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των παραπάνω παίρνουμε ότι

$$P(r) - P(q) = 2p - q - r \ . (4)$$

Όμως από την συνθήκη της εκφώνησης έχουμε ότι $P(r) - P(q) = r - q$ ή $P(r) - P(q) = q - r$. Στην πρώτη περίπτωση η (4) γίνεται $2r = 2p \Rightarrow r = p$, άτοπο αφού οι $p, r \in \{a_1, ..., a_m\}$ που είναι διακεκριμένοι. Όμοια, αν $P(r) - P(q) = q - r$ τότε η (4) δίνει $q = p$, πάλι άτοπο.

Αυτό σημαίνει ότι είτε $m < 3$, είτε ότι δεν υπάρχουν τέτοιοι $p, q, r \in \{a_1, ..., a_m\}$.

1η περίπτωση: Αν $m < 3$, τότε $n = 1$ ή $n = 0$. Προφανώς η $n = 0$ απορρίπτεται αφού κανένα σταθερό πολυώνυμο δεν ικανοποιεί. Η $n = 1$ δίνει $P(x) = ax + b$, οπότε πρέπει

$$|a \cdot a_i + b - a \cdot a_j - b| = |a_i - a_j| \Leftrightarrow |a| = 1$$

οπότε $P(x) = x + b$, ή $P(x) = -x + b$.

2η περίπτωση: Αν δεν υπάρχουν τέτοιοι $p, q, r \in \{a_1, ..., a_m\}$, τότε είτε $P(a_1) - a_1 = P(a_2) - a_2 = ... = P(a_m) - a_m = k$, οπότε οδηγούμαστε στην 1η περίπτωση που είδαμε στον 1ο τρόπο, είτε $P(a_1) + a_1 = P(a_2) + a_2 = ... = P(a_m) + a_m = \lambda$, οπότε οδηγούμαστε στην 2η περίπτωση που είδαμε στον 1ο τρόπο.

**(β)** Θα δείξουμε ότι αν $Q(x) = x^n$ και $|a_i| < \frac{1}{n}$ για κάθε $1 \leq i \leq m$ τότε ισχύει η ζητούμενη ανισότητα. Πράγματι,

$$|Q(a_i)-Q(a_j)|=|a_i^n-a_j^n|=|a_i-a_j|\cdot|a_i^{n-1}+a_i^{n-2}a_j+\ldots+a_j^{n-1}|\,(1)$$

και

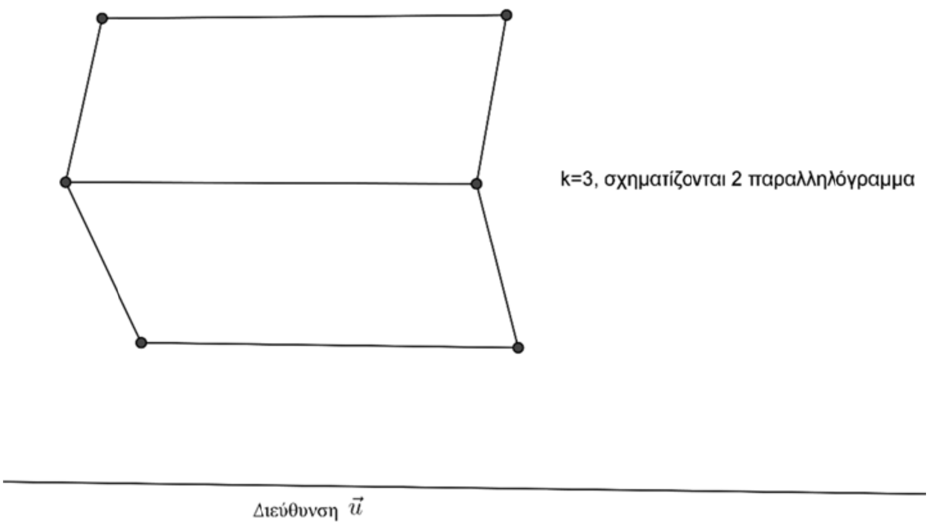
$$|a_i^{n-1}+a_i^{n-2}a_j+\ldots+a_j^{n-1}|\leq|a_i^{n-1}|+|a_i^{n-2}a_j|+\ldots+|a_j^{n-1}|<\frac{1}{n^{n-1}}+\frac{1}{n^{n-1}}+\ldots+\frac{1}{n^{n-1}}=\frac{n}{n^{n-1}}<1$$

οπότε από την (1) έχουμε $|P(a_i)-P(a_j)|<|a_i-a_j|$.

**Σημείωση:** Στο δεύτερο ερώτημα υπάρχουν και άλλες πιθανές κατασκευές που μπορεί να γίνουν.

**Πρόβλημα 4.**
Θεωρούμε $n$ σημεία στο επίπεδο, $n\geq 4$, ανά τρία μη συνευθειακά. Ονομάζουμε $\mathrm{A}(n)$ το πλήθος των παραλληλογράμμων εμβαδού 1 που σχηματίζονται με κορυφές αυτά τα σημεία. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{A}(n)\leq\dfrac{n^2-3n}{4}$, για κάθε $n\geq 4$.

**Λύση**
Σταθεροποιούμε μία διεύθυνση $\vec{u}$ στο επίπεδο. Σε κάθε ευθεία παράλληλη σε αυτή τη διεύθυνση μπορεί να έχουμε το πολύ δύο σημεία. Ας υποθέσουμε ότι σε ότι υπάρχουν $k$ ζεύγη σημείων για αυτή τη διεύθυνση. Τότε όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (για $k=3$ ), σχηματίζονται το πολύ $k-1$ παραλληλόγραμμα εμβαδού 1 με αυτά τα $k$ ζεύγη σημείων.



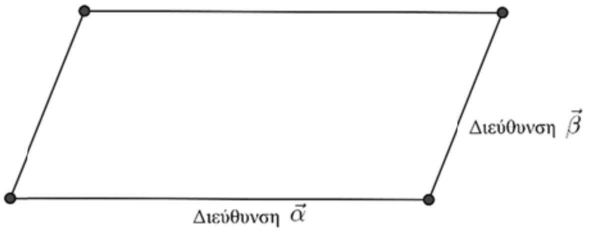

Σχήμα 3

Επομένως σε μία διεύθυνση με $k$ ζεύγη σημείων, σχηματίζονται πολύ $k-1$ παραλληλόγραμμα εμβαδού 1. Επομένως, αν αθροίσουμε τα παραλληλόγραμμα σε όλες τις διευθύνσεις, θα πάρουμε

$$\sum(k-1)=\left(\sum k\right)-s\ ,$$

όπου $s$ είναι το συνολικό πλήθος των διευθύνσεων στις οποίες βρίσκονται σημεία. Το άθροισμα όμως $\left(\sum k\right)$ είναι το άθροισμα όλων των τμημάτων, που είναι $\dbinom{n}{2}$.

Επομένως, το πλήθος των παραλληλογράμμων εμβαδού 1 είναι το $\binom{n}{2}-s$. Αλλά με αυτό τον τρόπο μετρήσαμε κάθε παραλληλόγραμμο δύο φορές. Μία φορά για την διεύθυνση $\vec{\alpha}$ και μία φορά για τη διεύθυνση $\vec{\beta}$, όπως φαίνεται στο σχήμα:

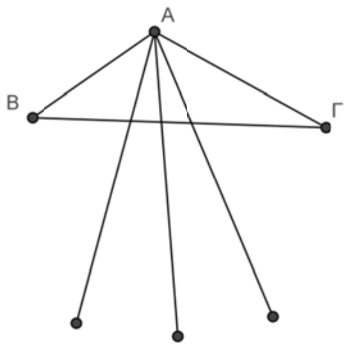



Σχήμα 4

Επομένως το συνολικό πλήθος των παραλληλογράμμων εμβαδού 1 είναι το πολύ

$$\frac{\binom{n}{2}-s}{2}.$$

Θα δείξουμε τώρα ότι αν έχουμε $n \geq 4$ σημεία στο επίπεδο, ανά τρία μη συνευθειακά, τότε το πλήθος των διευθύνσεων είναι $s \geq n$. Πράγματι ας πάρουμε τρία γειτονικά σημεία $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma$ (σε κυρτή θέση) όπως στο σχήμα:




Σχήμα 5

Το σημείο Α συνδέεται με $n-1$ τμήματα με τα υπόλοιπα σημεία. Όλα αυτά τα τμήμα έχουν κοινό σημείο το Α, οπότε ορίζουν $n-1$ διαφορετικές διευθύνσεις. Επιπλέον το τμήμα ΒΓ δεν είναι παράλληλο σε κανένα από αυτά τα τμήματα, αφού τα τέμνει όλα, άρα ορίζει μία ακόμη διεύθυνση. Επομένως έχουμε τουλάχιστον $n-1+1=n$ διαφορετικές διευθύνσεις, οπότε το πλήθος των παραλληλογράμμων είναι το πολύ

$$\frac{\binom{n}{2}-n}{2}=\frac{n^2-3n}{4}.$$