ΘΕΜΑΤΑ «ΕΥΚΛΕΙΔΗ» Α΄ΛΥΚΕΙΟΥ 1998 – 2006

1998 – 1999

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Αν α, β, γ ρητοί θετικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει
$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\alpha\beta\gamma$$
να αποδείξετε ότι ο αριθμός
$$(\alpha^2\beta^2+1)(\beta^2\gamma^2+1)(\gamma^2\alpha^2+1)$$
είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

2. Θεωρούμε κύκλο με κέντρο **Ο** και ακτίνα **2** και τετράγωνο **ΟΑΒΓ**. Αν το Τετράγωνο και ο κύκλος έχουν κοινό μέρος εμβαδού ίσο με τα $\frac{3}{5}$ του εμβαδού του τετραγώνου, να υπολογίσετε την πλευρά του τετραγώνου.

3. Να εξετάσετε αν υπάρχουν **τέσσεροι** διαφορετικοί φυσικοί αριθμοί, τέτοιοι ώστε το άθροισμα δύο οποιωνδήποτε από αυτούς να είναι δύναμη του **5**.

4. Έστω **ΑΒΓ** ισόπλευρο τρίγωνο και **Δ, Ε** σημεία των **ΑΒ, ΑΓ**. Να αποδείξετε ότι τα τμήματα **ΔΕ, ΒΕ, ΓΔ** αποτελούν πλευρές τριγώνου.

1999 – 2000

1. Δύο αμβλείες γωνίες είναι τοποθετημένες έτσι, ώστε το ένα ζεύγος των πλευρών τους να είναι ημιευθείες αντικείμενες, ενώ το άλλο ζεύγος είναι κάθετες ημιευθείες.
Να υπολογίσετε το άθροισμα των δύο γωνιών.

2. Για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύουν

$$x - yz = y - zx = z - xy.$$

Να αποδείξετε ότι:

$$(x - y)(y - z)(z - x) = 0.$$

3. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, x, y ισχύουν $\alpha \geq 2$, $1 \leq x \leq \alpha$ και $1 \leq y \leq \alpha$, να αποδείξετε ότι:

$$4 \leq (x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \leq \frac{(\alpha + 1)^2}{\alpha}.$$

4. Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι x, y που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$x^5y^2 + 100x^3 = 200.$$

2000 – 2001

1. Αν α και x είναι πραγματικοί αριθμοί και $\alpha \geq 1$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{x^2+\alpha}{\sqrt{x^2+\alpha-1}} \geq 2$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

2. Θεωρούμε 100 αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{100}$ από τους οποίους οι 40 είναι ίσοι με 1, οι 60 είναι ίσοι με 2 και τους τοποθετούμε πάνω σε ένα κύκλο έτσι, ώστε να μην υπάρχουν τρεις ίσοι αριθμοί σε διαδοχικές θέσεις. Σχηματίζονται έτσι 100 τριάδες $T_i, i = 1,2,\ldots,100,$ αριθμών σε διαδοχικές θέσεις πάνω στο κύκλο. Αν P_i είναι το γινόμενο και S_i είναι το άθροισμα των τριών αριθμών της τριάδας $T_i, i = 1,2,\ldots,100,$ να αποδείξετε ότι:

(α) $P_i = 2S_i - 6$, για κάθε $i = 1,2,\ldots,100$

(β) $P_1 + P_2 + \ldots + P_{100} = 360.$

3. **(i)** Να παραγοντοποιηθεί η παράσταση: $x^4 + 4y^4$

(ii) Αν οι αριθμοί x,y είναι θετικοί ακέραιοι και $y \geq 2$ να αποδείξετε ότι ο αριθμός $x^4 + 4y^4$ είναι σύνθετος.

4. Θεωρούμε τις κάθετες ημιευθείες Ot, Os, το σημείο Α της Ot με ΟΑ=x και το σημείο Β της Os με ΟΒ=y και y<x. Κατασκευάζουμε το τετράγωνο ΑΒΓΔ μέσα στη γωνία tOs. Από την κορυφή Δ φέρουμε ευθεία ε κάθετη στη διχοτόμο Οδ της γωνίας tOs η οποία τέμνει την Os στο Ε και Ot στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

(i) ΑΖ=x+y και ΒΕ=2x.

(ii) Το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισοσκελές.

2001 – 2002

1. Τριψήφιος αριθμός είναι μεγαλύτερος του 610, μικρότερος του 650 και διαιρούμενος με το 7 δίνει υπόλοιπο 3. Να βρεθεί ο αριθμός, αν είναι γνωστό ότι είναι πολλαπλάσιο του 5.

2. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση

$$A = (1 + x - x^2 + x^3)^2 + x^3$$

3. Από το μέσον Μ της υποτείνουσας ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ με $\hat{A} = 90°$ και $AB > A\Gamma$ φέρουμε κάθετη προς την ΒΓ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ. Αν τα τρίγωνα ΔΜΒ και ΔΑΓ είναι ίσα, να βρείτε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

4. Έστω

$$A = \frac{1}{\sqrt{9x^2 - 6x + 1}}, \quad B = \frac{2(x+1)}{\sqrt{x^2 + 2x + 1}} .$$

Να βρείτε όλες τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες η αριθμητική τιμή της παράστασης

$$\Gamma = \frac{2A + B}{3}$$

είναι ακέραιος αριθμός

2002 – 2003

1. Να επιλύσετε ως προς x την εξίσωση

$$\frac{3\alpha+1}{\alpha+x}-\frac{\alpha-1}{\alpha-x}=\frac{2\alpha(\alpha^2-1)}{x^2-\alpha^2},\ \ \alpha\in R.$$

   Για ποιες θετικές ακέραιες τιμές του α οι ρίζες της εξίσωσης είναι αριθμοί πρώτοι;

2. (i) Αν α είναι πραγματική παράμετρος και $\dfrac{2\alpha}{x^2-\alpha^2}=\dfrac{A}{x-\alpha}-\dfrac{B}{x+\alpha}$, για κάθε $x\in R-\{-\alpha,\alpha\}$, να βρείτε τους αριθμούς Α και Β.

   (ii) Αν είναι $x\neq m$, όπου $m\in\{-10,-9,\ldots,-1,0,1,\ldots,9,10\}$, να αποδείξετε ότι

$$\frac{2}{x^2-1}+\frac{4}{x^2-4}+\frac{6}{x^2-9}+\ldots+\frac{20}{x^2-100}=$$
$$=11\left[\frac{1}{(x-1)(x+10)}+\frac{1}{(x-2)(x+9)}+\ldots+\frac{1}{(x-10)(x+1)}\right].$$

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}=120^{o}$. Αν ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι οι διχοτόμοι των γωνιών του, να υπολογίσετε τη γωνία $\Delta\hat{E}Z$.

4. Αν οι x, y, z είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{x^3+y^3+xyz}+\frac{1}{y^3+z^3+xyz}+\frac{1}{z^3+x^3+xyz}\leq\frac{1}{xyz}$$

2003 – 2004

1. Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z και w.
Αν αντικαταστήσουμε τους x, y, z, w με τους αριθμούς

$$x_1 = x + 10, y_1 = y + 10, z_1 = z + 10, w_1 = w + 10,$$

το άθροισμα των x_1, y_1, z_1, w_1 είναι 1040.
Αν αντικαταστήσουμε τους x, y, z, w με τους αριθμούς

$$x_2 = 10 - x, y_2 = 20 - y, z_2 = 30 - z, w_2 = 40 - w$$

πόσο θα είναι το άθροισμα $x_2 + y_2 + z_2 + w_2$;

2. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $n^2 + 5n + 5$, δεν είναι τέλειο τετράγωνο για οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}$.

3. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Με κέντρο Α και ακτίνα ΑΒ γράφουμε κύκλο.
Από τυχόν σημείο Μ του τόξου ΒΔ που βρίσκεται μέσα στο τετράγωνο φέρουμε κάθετη προς την ακτίνα ΑΜ, η οποία τέμνει την ΒΓ στο Ε και την ΓΔ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι :
(ι) ΕΖ=ΒΕ+ΔΖ
(ιι) $\frac{\alpha}{2} < EZ < \alpha$

4. Οι αριθμοί μ, ν είναι θετικοί ακέραιοι με $\mu \leq 6008$. Να προσδιορίσετε τη μικρότερη δυνατή θετική τιμή του αριθμού $A = 3 - \frac{\mu}{\nu}$.

2004 – 2005

ΘΕΜΑ 1ο

Ένας μαθητής θέλει να αγοράσει δύο βιβλία. Το βιβλίο Α κοστίζει το 60% των χρημάτων (ευρώ) που έχει μαζί του, ενώ το βιβλίο Β κοστίζει το 44% των χρημάτων που έχει μαζί του. Αν είχε 80 λεπτά περισσότερα, τότε θα είχε ακριβώς τα χρήματα που κοστίζουν και τα δύο βιβλία μαζί.

Να βρείτε πόσα χρήματα κοστίζει κάθε ένα από τα δύο βιβλία.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Αν β και γ είναι τα μήκη των κάθετων πλευρών ορθογωνίου τριγώνου του οποίου η υποτείνουσα είναι α, να αποδείξετε ότι

$$\beta^4 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^4 \geq \frac{3}{4}\alpha^4$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και το ύψος του ΑΔ. Στα σημεία Β και Γ φέρουμε κάθετα τμήματα ΒΕ και ΓΖ προς τη ΒΓ, τέτοια ώστε $ΒΕ=ΓΖ=\frac{ΑΔ}{2}$ και τα Ε, Ζ να βρίσκονται σε διαφορετικό ημιεπίπεδο από το Α ως προς τη ΒΓ.

(α) Να αποδείξετε ότι ΑΕ = ΑΖ.

Μονάδες 2

(β) Αν είναι $E(ΑΒΓ) = \kappa^2$, να προσδιορίσετε τα εμβαδά των τριγώνων ΑΕΖ και ΑΚΛ, όπου Κ, Λ είναι τα σημεία τομής των ΑΕ και ΑΖ με τη ΒΓ, αντίστοιχα.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 4ο

Αν είναι

$$A = 2(\lambda^2 + \mu^2) - (\lambda + \mu)^2 - 4 \text{ και } B = \lambda^2 - \lambda\mu + \lambda + \mu - 2, \text{ όπου } \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

να λύσετε την εξίσωση

$$Ax = B,$$

ως προς x, για τις διάφορες τιμές των πραγματικών παραμέτρων λ και μ.

Μονάδες 5

2005 – 2006

1. Έστω ότι οι ακέραιοι αριθμοί α και $\alpha + 2$ είναι πρώτοι με $\alpha > 3$. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $\alpha + 4$ είναι σύνθετος.

2. Οι αριθμοί α και β είναι θετικοί και ισχύει $\alpha + \beta = \lambda$. Να δεχθεί ότι

$$\frac{4}{3\lambda} \leq \frac{1}{\alpha+\lambda} + \frac{1}{\beta+\lambda} < \frac{3}{2\lambda}.$$

3. Έστω ΑΒΓ ένα σκαληνό τρίγωνο. Πόσα σημεία Δ υπάρχουν στο επίπεδο του τριγώνου τέτοια ώστε το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία Α, Β, Γ, Δ να έχει άξονα συμμετρίας διαφορετικό από πλευρά του τριγώνου;

4. Έστω Α και Β δύο μη κενά και ξένα μεταξύ τους σύνολα των οποίων η ένωση είναι το σύνολο $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Να αποδειχθεί ότι ένα τουλάχιστον από τα Α και Β περιέχει τουλάχιστον τη διαφορά δύο στοιχείων του.

<u>ΛΥΣΕΙΣ</u>

1998 – 1999

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \alpha^2\beta^2\gamma^2$ και άρα $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha^2 = \alpha^2(\beta^2,\gamma^2 + 1)$ δηλαδή $(\alpha + \gamma)(\beta + \alpha) = \alpha^2\,(\beta^2\gamma^2 + 1)$ και κυκλικώς.

   Άρα $(\beta^2\gamma^2 + 1)\ (\alpha^2\beta^2 + 1)(\alpha^2\gamma^2 + 1) = (\alpha + \beta)^2\,(\beta + \gamma)^2\,(\alpha + \gamma)^2 \,/\, \alpha^2\beta^2\gamma^2$.

2. Έστω x η πλευρά του τετραγώνου. Τότε $\frac{3}{5}x^2 = \frac{\pi R^2}{4}$. Άρα $x^2 = \frac{5}{12}\pi R^2$, δηλαδή

   $x = \frac{\pi R}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$.

3. Δύο από τους τέσσερις αριθμούς θα είναι ή άρτιοι ή περιττοί και το άθροισμά τους θα είναι άρτιος και άρα όχι δύναμη του 5.

4. Έστω Ο το σημείο τομής των ΒΕ και ΓΔ τότε ΔΕ < ΟΔ + ΟΕ < ΒΕ + ΓΔ
   Έστω ΔΓ > ΒΕ τότε ΔΓ < ΔΕ + ΕΓ < ΔΕ + ΒΕ αφού ΒΕ > ΕΓ (60⊇ > ΕΒΓ).

1999 – 2000

1. Το άθροισμα των δύο γωνιών είναι 270°.

2. Από την ισότητα $x - yz = y - zx$ έχουμε $(x-y)\cdot(1+z)=0$, οπότε θα είναι $x-y=0$ ή $z=-1$.
   - Αν $x-y=0$, τότε ισχύει το ζητούμενο.
   - Αν $z=-1$, τότε από $y - zx = z - xy$ έπεται ότι $y+x=-1-xy$ ή $(1+x)\cdot(1+y)=0$, οπότε θα έχουμε $x=-1$ ή $y=-1$ με συνέπεια $z-x=0$ ή $y-z=0$.

3. Είναι $4 \le (x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \Leftrightarrow \frac{(x+y)^2}{xy} \ge 4 \Rightarrow \frac{(x-y)^2}{xy} \ge 0$, που ισχύει.

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \le \frac{(\alpha+1)^2}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{(x+y)^2}{xy} \le \frac{(\alpha+1)^2}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha x^2 + \alpha y^2 - \alpha^2 xy - xy \le 0 \Leftrightarrow$$

$(\alpha x - y)(x-\alpha y) \le 0$. Όμως από τις υποθέσεις $1 \le x \le \alpha$ και $1 \le y \le \alpha$, έχουμε ότι $\alpha \le \alpha x \le \alpha^2$ και $-\alpha \le -y \le -1$, οπότε με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει ότι : $0 \le \alpha x - y \le \alpha^2 - 1$. Ομοίως προκύπτει ότι $1-\alpha^2 \le x - \alpha y \le 0$, κλπ.

4. Έχουμε $x^3 \cdot (x^2y^2 + 100) = 200$, οπότε θα είναι $x \ne 0$ και $x^2y^2 + 100 = \frac{200}{x^3}$. Επειδή ζητάμε θετικούς ακέραιους x, y πρέπει ο x^3 να είναι ένας από τους θετικούς διαιρέτες του 200. Έτσι καταλήγουμε στη λύση $\mathbf{x=1, y=10}$.

2000 – 2001

1. $\dfrac{x^2+\alpha}{\sqrt{x^2+\alpha-1}} \Leftrightarrow x^2+\alpha \geq 2\sqrt{x^2+\alpha-1}$ $\quad$ [αφου $\sqrt{x^2+\alpha-1} > 0$]

$\Leftrightarrow x^4+2\alpha x^2+\alpha^2 \geq 4(x^2+\alpha-1)$ $\quad$ [αφου $\sqrt{x^2+\alpha-1} > 0$]

$\Leftrightarrow x^4+2(\alpha-2)x^2+(\alpha-2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow [x^4+(\alpha-2)]^2 \geq 0$, που ισχύει.

Η ισότητα ισχύει όταν $x^2 = 2-\alpha \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2-\alpha}$, $\;1 \leq \alpha \leq 2$.

2. (α) Επειδή δεν υπάρχουν τρείς ίσοι διαδοχικοί αριθμοί, για τα σημεία οποιασδήποτε τριάδας T_i υπάρχουν δύο δυνατότητες:

1η) Το ένα να είναι 1 και τα δύο να είναι 2, οπότε θα έχουμε: $S_i = 1+2+2 = 5$, $P_i = 1\cdot 2\cdot 2 = 4$ και $P_i = 2S_i - 6$.

2η) Το ένα να είναι 2 και τα δύο να είναι 1, οπότε θα έχουμε $S_i = 4$, $P_i = 2$ και $P_i = 2S_i - 6$.

(β)

$P_1+P_2+\ldots+P_{100} = (2S_1-6)+(2S_2-6)+\ldots+(2S_{100}-6) = 2(S_1+S_2+\ldots+S_{100}) - 100\cdot 6$

.

Καθένας από τους 100 αριθμούς ανήκει σε τρείς διαφορετικές τριάδες, οπότε: $S_1+S_2+\ldots+S_{100} = 3\cdot(40\cdot 1+60\cdot 2) = 3\cdot 160 = 480$.

Άρα είναι: $P_1+P_2+\ldots+P_{100} = 2\cdot 480 - 600 = 360$.

3. (i)

$x^4+4y^4 = (x^2)^2+(2y^2)^2+4x^2y^2-4x^2y^2 = (x^2+2y^2)^2-(2xy)^2$

$= (x^2+2y^2+2xy)\cdot(x^2+2y^2-2xy)$.

(ii) $\quad x^4+4y^4 = [(x+y)^2+y^2][(x-y)^2+y^2]$.

Επειδή οι αριθμοί $(x+y)^2+y^2$, $(x-y)^2+y^2$ είναι ακέραιοι μεγαλύτεροι του 1, ο αριθμός x^4+4y^4 είναι σύνθετος. Για x=y ο αριθμός $(x-y)^2+y^2$ γίνεται y^2 και είναι $y^2 > 1$, αφού $y \geq 2$.

4. (i) Επειδή είναι $ZE \perp O\delta$, το τρίγωνο ΟΕΖ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές (ΟΕ=ΟΖ). Φέρουμε $\Delta K \perp AZ$ και έχουμε:

$$A\overset{\Delta}{K}\Delta = O\overset{\Delta}{A}B[\hat{O} = \hat{K} = 90^\circ, \quad A\Delta = AB, \quad K\overset{\Delta}{\Delta}A = 90^\circ - K\hat{A}\Delta = O\overset{\Delta}{A}$$

Άρα είναι ΑΚ=ΟΒ=y, ΚΔ=ΟΑ=x.

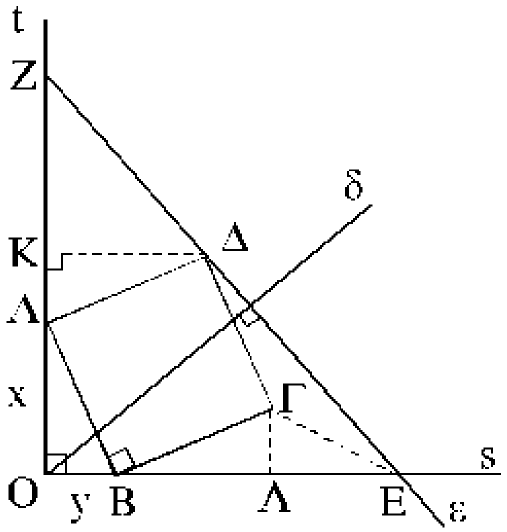
Επίσης το τρίγωνο ΔΚΖ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε ΚΖ=ΚΔ=x.

Άρα έχουμε ΑΖ=ΑΚ+ΚΖ=x+y.

Επίσης έχουμε:

$$BE = OE - OB = OZ - OB = OA + AZ - OB = x + x + y - y = 2x.$$

(ii) Φέρουμε το ύψος ΓΛ. Τότε $B\overset{\Delta}{\Gamma}\Delta = O\overset{\Delta}{A}B$, οπότε ΒΛ=ΟΑ=x και ΛΕ=ΒΕ-ΒΛ=x, δηλ. η ΓΛ είναι και διάμεσος.



2001 – 2002

1. Είναι ο αριθμός 640.

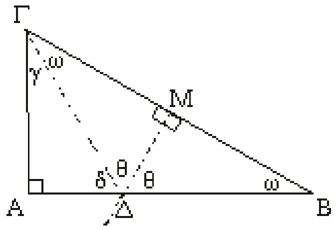
2. $A = (1+x-x^2+x^3)^2 - 1 + 1 + x^3$

$= (1+x-x^2+x^3-1)(1+x-x^2+x^3+1) + (1+x)(1-x+x^2)$

$= x(1-x+x^2)(2+x-x^2+x^3) + (1+x)(1-x+x^2)$

$= (1-x+x^2)\cdot(1+3x+x^2-x^3+x^4)$.

3. Κατ' αρχήν είναι: τρ. $\Delta MB =$ τρ. $\Delta M\Gamma$ $[M\Delta = M\Delta,\ MB = M\Gamma,$ $\Delta\hat{M}B = 90^\circ = \Delta\hat{M}\Gamma]$. Επομένως θα είναι ίσα και τα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta M\Gamma$, $\Delta A\Gamma$.



Επειδή αυτά έχουν κοινή την υποτείνουσα ΓΔ υπάρχουν δύο πιθανές περιπτώσεις:

- $\gamma=\omega$ και $\delta=\theta$

  Όμως $\gamma+\delta=90^\circ$ και $2\theta+\delta=180^\circ$, οπότε θα έχουμε $3\theta=180^\circ$, δηλαδή $\theta=60^\circ$ και $\hat{B}=\omega=30^\circ$ και $\hat{\Gamma}=60^\circ$.

- $\gamma=\theta$ και $\delta=\omega$.

  Όμως $\gamma+\delta=90^\circ$ και $\delta+2\theta=180^\circ$ $\Rightarrow \theta+\omega=90^\circ$ και $\omega+2\theta=180^\circ$

  $\Rightarrow 90-\theta^\circ+2\theta=180^\circ$

  $\Rightarrow \theta^\circ=90^\circ$, άτοπο.

  Άρα είναι $\hat{B}=30^\circ$ και $\hat{\Gamma}=60^\circ$.

4. Έχουμε:

$$A = \frac{1}{|3x-1|}, \text{ για } x \neq \frac{1}{3}, \quad B = \frac{2(x+1)}{|x+1|}, \text{ για } x \neq -1,$$

οπότε θα είναι

$$\Gamma = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{|3x-1|} + \frac{x+1}{|x+1|}\right), \text{ για } x \neq -1, \frac{1}{3}.$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Για $x < -1$ είναι

$$\Gamma = -\frac{2x}{3x-1} > 0,$$

ενώ είναι $\Gamma - 1 = -\frac{2x}{3x-1} - 1 = \frac{-5x+1}{3x-1} < 0$.

Άρα είναι $0 < \Gamma < 1$, για κάθε $x < -1$, οπότε δεν υπάρχει x ακέραιος μικρότερος του -1 τέτοιος ώστε ο Γ να είναι ακέραιος.

- Για $x > \frac{1}{3}$ είναι:

$$\Gamma = \frac{2x}{3x-1} > 0 \text{ και } \Gamma - 1 = \frac{1-x}{3x-1} \leq 0$$

[η ισότητα ισχύει για x=1].

Άρα είναι $0 < \Gamma < 1$, για κάθε $x > \frac{1}{3}$ με $x \neq 1$, ενώ είναι Γ=1 για x=1.

- Για $-1 < x < \frac{1}{3}$ ο μοναδικός ακέραιος είναι ο x=0, οπότε είναι $\Gamma = \frac{4}{3} \notin \mathbb{Z}$.

Άρα μόνο για x=1 είναι $\Gamma = 1 \in \mathbb{Z}$.

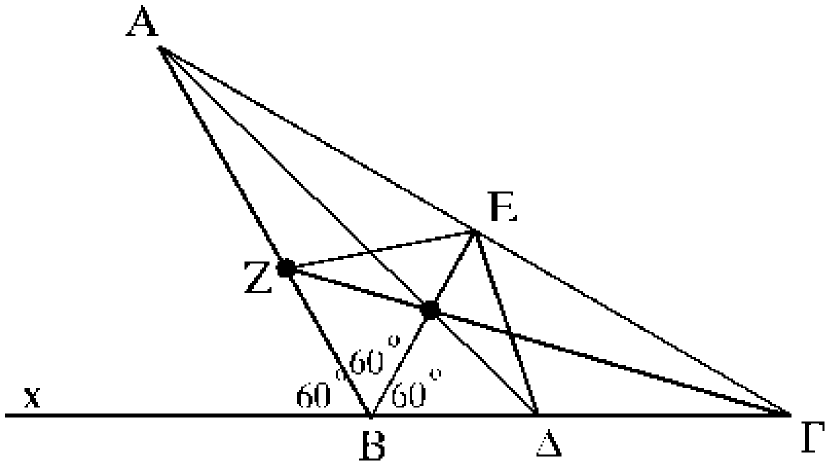
2002 – 2003

1. Μετά τις πράξεις η εξίσωση γίνεται: $2\alpha x = \alpha^2(\alpha+1)$, $x \neq \pm\alpha$.
   Αν $\alpha=0$, τότε $0 \cdot x = 0$, $x \neq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^*$, δηλαδή η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις.
   Αν $\alpha \neq 0$, τότε $x = \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2}$, $x \neq \pm\alpha$. Η τιμή αυτή είναι ρίζα όταν έχουμε
   $\dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2} \neq \pm\alpha \Leftrightarrow \alpha+1 \neq \pm 2 \Leftrightarrow \alpha \neq 1$ και $\alpha \neq -3$.
   Η ρίζα $\dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2}$ είναι ο αριθμός πρώτος, μόνον όταν α=2.

2. (i) $\dfrac{2\alpha}{x^2-\alpha^2} = \dfrac{A}{x-\alpha} - \dfrac{B}{x+\alpha} \Leftrightarrow A(x+\alpha) - B(x-\alpha) = 2\alpha$, για κάθε $x \neq \pm\alpha$.
   Για x=2α έχουμε 3Α-Β=2 (1)
   Για x=3α έχουμε 4Α-2Β=2 (2)
   Από (1), (2) λαμβάνουμε: Α=1, Β=1.

   (ii) Από το (i) για α=1,2, … , 10 έχουμε:
   $$\frac{2}{x^2-1} + \frac{2}{x^2-4} + \frac{6}{x^2-9} + \ldots + \frac{20}{x^2-100} =$$
   $$= \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} + \ldots + \frac{1}{x-10} - \frac{1}{x+10} =$$
   $$= \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+10}\right) + \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+9}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{x-10} - \frac{1}{x+1}\right)$$
   $$= \frac{11}{(x-1)(x+10)} + \frac{11}{(x-2)(x+9)} + \ldots + \frac{11}{(x-10)(x+1)}.$$

3. Το Ζ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $A\hat{\Gamma}B$, αλλά και στη διχοτόμο ΒΑ της γωνίας $E\hat{B}x$. Άρα το Ζ ισαπέχει από τις πλευρές ΓΑ, Γx και ΒΕ, οπότε α-νήκει και στη διχοτόμο της γωνίας $A\hat{E}B$. Άρα η ΖΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{E}B$. Το Ζ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $A\hat{\Gamma}B$, αλλά και στη διχοτόμο ΒΑ της γωνίας $E\hat{B}x$. Άρα το Ζ ισαπέχει από τις πλευρές ΓΑ, Γx και ΒΕ, οπότε ανήκει και στη διχοτόμο της γωνίας $A\hat{E}B$. Άρα η ΖΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{E}B$.



Ομοίως βρίσκουμε ότι η ΕΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{E}\Gamma$. Άρα είναι $\Delta\hat{E}Z = 90^o$ ως γωνία των διχοτόμων δύο εφεξής παραπληρωματικών γωνιών.

4. Θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα $x^3 + y^3 \geq xy(x + y)$, που αληθεύει γιατί $x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2(x - y) - y^2(x - y) \geq 0$

$\Leftrightarrow (x - y)(x^2 - y^2) \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2(x + y) \geq 0$, που ισχύει αφού x, y > 0.

Ομοίως έχουμε $y^3 + z^3 \geq yz(y + z)$, $z^3 + x^3 \geq zx(z + x)$.

Τότε $\dfrac{1}{x^3 + y^3 + xyz} + \dfrac{1}{y^3 + z^3 + xyz} + \dfrac{1}{z^3 + x^3 + xyz} \leq$

$$\frac{1}{xy(x + y) + xyz} + \frac{1}{yz(y + z) + xyz} + \frac{1}{zx(z + x) + xyz} =$$

$$= \frac{1}{xy(x + y + z)} + \frac{1}{yz(y + z + x)} + \frac{1}{zx(z + x + y)} =$$

$$\frac{z + x + y}{xyz(x + y + z)} = \frac{1}{xyz}$$

2003 – 2004

1. Από την υπόθεση έχουμε:

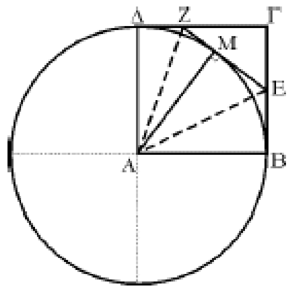
$$(x+10)+(y+10)+(z+10)+(w+10)=1040 \Leftrightarrow$$
$$(x+y+z+w)+40=1040 \Leftrightarrow x+y+z+w=1000.$$

Άρα θα έχουμε:

$$x_2+y_2+z_2+w_2=100-(x+y+z+w)=100-1000=-900.$$

2. Παρατηρούμε ότι: $(n+2)^2<n^2+5n+5<(n+3)^2$, οπότε ο φυσικός αριθμός n^2+5n+5 βρίσκεται μεταξύ δύο τετραγώνων διαδοχικών φυσικών αριθμών. Άρα δεν μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο για οποιοδήποτε $n \in N$.

3. (i) Τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΜΖ είναι ορθογώνια ($\hat{\Delta}=\hat{M}=90^\circ$) και έχουν την υποτείνουσα ΑΖ κοινή και ΑΔ=ΑΜ=α, ως ακτίνες τους κύκλους (Α, α).



Άρα είναι ίσα, οπότε θα έχουν και

$$ZM=\Delta Z \qquad (1).$$

Ομοίως τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΜΕ είναι ίσα, οπότε θα έχουν και

$$ME=EB \qquad (2).$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) προκύπτει ότι ΕΖ=ΒΕ+ΔΖ.

(ii) Από το τρίγωνο ΕΓΖ λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} EZ < E\Gamma + Z\Gamma &= (B\Gamma - EB) + (\Gamma\Delta - \Delta Z) \\ &= (B\Gamma + \Gamma\Delta) - (EB + \Delta Z) \\ &= 2\alpha - EZ \end{aligned}$$

Άρα είναι

$$EZ < 2\alpha - EZ \Rightarrow 2EZ < 2\alpha \Rightarrow EZ < \alpha \qquad (3)$$

Από τις (3) και (4) προκύπτει η (ii).

4. Για να είναι ο $A = 3 - \frac{\mu}{\nu} = \frac{3\nu - \mu}{\nu}$ θετικός και να παίρνει τη μικρότερη δυνατή τιμή πρέπει ο αριθμητής του 3ν-μ να παίρνει τη μικρότερη δυνατή θετική τιμή (δηλαδή πρέπει 3ν-μ=1) και ο παρανομαστής του να παίρνει τη μεγαλύτερη δυνατή θετική τιμή.

Επειδή $\mu \leq 6008$ και 3ν-μ=1 έπεται ότι $3\nu - 1 \leq 6008 \Rightarrow \nu \leq 2003$.

Άρα η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του ν είναι 2003, οπότε η μικρότερη δυνατή θετική τιμή του Α είναι $\frac{1}{2003}$.

Παρατήρηση:

Επειδή ο ν είναι θετικός ακέραιος, αποκλείεται να είναι οι δύο όροι του κλάσματος $\frac{3\nu - \mu}{\nu}$ αρνητικοί.

2004 – 2005

1. Αν ο μαθητής έχει μαζί του x Ευρώ, τότε σύμφωνα με τις υποθέσεις του προβλήματος έχουμε την εξίσωση

$$\frac{60x}{100}+\frac{44x}{100}=x+0,8 \Leftrightarrow 60x+44x=100x+80 \Leftrightarrow 4x=80 \Leftrightarrow x=20.$$

Επομένως τα βιβλία Α και Β κοστίζουν $0,6\cdot 20=12$ και $0,44\cdot 20=8,8$ Ευρώ.

2. Επειδή είναι $\beta^2+\gamma^2=\alpha^2$, αρκεί να αποδείξουμε ότι

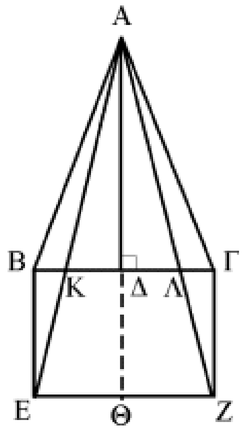
$$4(\beta^4+\beta^2\gamma^2+\gamma^4)\geq 3(\beta^2+\gamma^2)^2 \Leftrightarrow \beta^4+\gamma^4-2\beta^2\gamma^2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\beta^2-\gamma^2)^2\geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

3. **(α)** Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΖ είναι ίσα , γιατί έχουν:

$$AB=A\Gamma,\ BE=\Gamma Z=\frac{A\Delta}{2} \text{ και } \widehat{ABE}=90^\circ+\hat{B}=90^\circ+\hat{\Gamma}=\widehat{A\Gamma Z}.$$

Άρα θα είναι και ΑΕ = ΑΖ.



(β) $E(AEZ)=\frac{1}{2}\cdot EZ\cdot A\Theta=\frac{1}{2}\cdot B\Gamma\cdot\frac{3}{2}A\Delta=\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}B\Gamma\cdot A\Delta\right)=\frac{3}{2}E(AB\Gamma)=\frac{3\kappa^2}{2}$.

$$\frac{E(AK\Lambda)}{E(AEZ)}=\left(\frac{AK}{AE}\right)^2=\left(\frac{A\Delta}{A\Theta}\right)^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9},$$

οπότε $E(AK\Lambda)=\frac{4}{9}E(AEZ)=\frac{4}{9}\cdot\frac{3\kappa^2}{2}=\frac{2\kappa^2}{3}$.

4. Έχουμε

$$A=\lambda^2+\mu^2-2\lambda\mu-4=(\lambda-\mu)^2-2^2=(\lambda-\mu-2)(\lambda-\mu+2)$$

$$\begin{aligned}B=\lambda^2-\lambda\mu+\lambda+\mu-2&=\lambda^2-\lambda\mu+\lambda+\mu-1-1\\&=(\lambda^2-1)-\mu(\lambda+1)+(\lambda-1)\\&=(\lambda-1)(\lambda+1-\mu+1)\\&=(\lambda-1)(\lambda-\mu+2)\end{aligned}$$

Επομένως έχουμε την εξίσωση

$$(\lambda-\mu-2)(\lambda-\mu+2)\ x=(\lambda-1)(\lambda-\mu+2)$$

και διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(i) Αν $\lambda-\mu+2=0\Leftrightarrow\lambda=\mu-2,\mu\in\mathbb{R}$, τότε η εξίσωση γίνεται $0\cdot x=0$ και είναι ταυτότητα, δηλαδή αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(ii) Αν $\lambda-\mu-2=0\Leftrightarrow\lambda=\mu+2,\mu\in\mathbb{R}$, τότε η εξίσωση γίνεται $0\cdot x=4(\mu+1)$.

- Για $\mu=-1$, οπότε $\lambda=1$, η εξίσωση αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ενώ
- Για $\mu\neq-1$ η εξίσωση είναι αδύνατη.

(iii) Αν $\lambda\neq\mu+2$ και $\lambda\neq\mu-2$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση

$$x=\frac{\lambda-1}{\lambda-\mu-2}.$$

2005 – 2006

1. Ένας από τους αριθμούς α, α +1, α + 2 διαιρείται με τον 3 και αυτός πρέπει να είναι ο α + 1. Άρα ο αριθμός α + 4 = α + 1 + 3 διαιρείται με τον 3.

2. Έχουμε

$$\frac{1}{\alpha+\lambda}+\frac{1}{\beta+\lambda}=\frac{3\lambda}{\alpha\beta+2\lambda^2}.$$

Η πρώτη ανισότητα είναι ισοδύναμη με

$$4\alpha\beta \leq (\alpha+\beta)^2,$$

και η δεύτερη με

$$3\alpha\beta > 0.$$

3. Το Δ πρέπει να είναι συμμετρικό κορυφής του τριγώνου ως προς τη μεσοκάθετο της απέναντι πλευράς. Άρα υπάρχουν 3 τέτοια σημεία.

4. Έστω ότι κανένα από τα δύο σύνολα δεν περιέχει τη διαφορά δύο στοιχείων του. Τότε προφανώς το 2 δεν μπορεί να ανήκει στο ίδιο σύνολο με το 1 ούτε με το 4 γιατί 2 – 1 = 1 και 4 – 2 = 2. Έστω λοιπόν $2 \in A$, οπότε $1 \in B$ και $4 \in B$.
Επειδή 4 – 1 = 3, έπεται ότι $3 \notin B$ και επομένως $3 \in A$. Επειδή 5 – 2 = 3, έπεται ότι $5 \notin A$ και επειδή 5 – 1 = 4, έπεται $5 \notin B$. Άτοπο επειδή $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.